Лекция 4 14.02.2025

§ 7. Интеграл с переменным верхним пределом

1^0. Понятие интеграла с переменным верхним пределом

Определение

Пусть f интегрируема на отрезке $[a, b], x_0 \in [a, b]$. Тогда f интегрируема на отрезке с концами x_0, x. Положим

$$F : F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Функция F называется интегралом с переменным верхним пределом.

Обычно в качестве x_0 выбирают a, $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$

2^0. Непрерывность

Теорема 1

При вышеперечисленных условиях F непрерывна.

Доказательство. Пусть $x_1, x \in [a, b]$. По аддитивности интеграла

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt,$$

т.е. $F(x) = F(x_1) + \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt,\ F(x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$,

$$|F(x) - F(x_1)| \le M\,|x - x_1|,$$

где $M = \sup\limits_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Последнее неравенство влечет за собой непрерывность функции F.

3^0. Дифференцируемость

Теорема 2

Пусть дополнительно функция f непрерывна в точке x_1.

Тогда F дифференцируема в точке x_1,

$$F'(x_1) = f(x_1),$$

интеграл с переменным верхним пределом имеет подынтегральную функцию в качестве производной.

Доказательство

Можно считать, что $x_1 < b$. В такой ситуации докажем, что $F'_+(x_1) = f(x_1)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку функция f непрерывна, найдется $\delta > 0$, такое что неравенство $f(x_1) - \varepsilon < f(x) < f(x_1) + \varepsilon$ выполняется при всех $x \in [x_1, x_1 + \delta)$.

Если $x \in (x_1,\, x_1+\delta)$, то $f(x_1)-\varepsilon < f(t) < f(x_1)+\varepsilon$ для $t \in [x_1,\, x]$. Интегрируя, получаем неравенства

$$\left(f(x_1)-\varepsilon\right)(x-x_1) \le F(x)-F(x_1) = \int_{x_1}^{x} f(t)\,dt \le \left(f(x_1)+\varepsilon\right)(x-x_1),$$

$$\left(f(x_1)-\varepsilon\right) \le \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} \le \left(f(x_1)+\varepsilon\right).$$

Сказанное означает, что

$$\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} \underset{x\to x_1}{\to} f(x_1),\; F'_+(x_1) = f(x_1).$$

§ 8. Формула Ньютона Лейбница

Теорема 1. О существовании первообразной

Пусть f непрерывна на отрезке $[a,\, b]$.

Тогда интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для f.

Замечание. Можно ослабить требования к функции f: считать функцию ограниченной с конечным числом разрывов. В таком случае функция F окажется обобщенной первообразной, она будет непрерывной, а равенство $F'(x) = f(x)$ окажется выполненным во всех точках, кроме конечного их числа.

Дополнения.

1) f непрерывна на $[a,\, b]$, $F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$.

Тогда $F'(x) = -f(x)$.

2) α, β — дифференцируемые функции со значениями в $[a,\, b]$, $F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$.

Тогда $F'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$.

Теорема 2. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть f непрерывна на отрезке $[a,\, b]$. Φ — ее первообразная.

Тогда

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\Big|_a^b. \qquad (1)$$

Последнее равенство называется формулой Ньютона-Лейбница.

Доказательство

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. По теореме о строении множества первообразных функции $F,\, \Phi$ различаются на постоянную, $F = \Phi + C$, в частности, $0 = F(a) = \Phi(a) + C$, $C = -\Phi(a)$ так что $F = \Phi - \Phi(a)$. С другой стороны, $I = F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Формула Ньютона-Лейбница справедлива и для ограниченной функции f с конечным числом разрывов и ее обобщенной первообразной Φ.

§ 9.Замена переменной в определенном интеграле

1^0.Теорема 1

Пусть f непрерывна на промежутке Δ, φ непрерывно дифференцируема на Δ', $\varphi(\Delta') \subset \Delta$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,, \tag{1}$$

где $\alpha,\ \beta \in \Delta'$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Доказательство

Пусть Φ — первообразная для f. По формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Функция $\Phi \circ \varphi$ — первообразная для второго интеграла, поэтому

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Тем самым теорема доказана.

Замечание.

Часто замена переменной выполняется в ситуации, где функция φ строго монотонна на отрезке $[\alpha,\ \beta]$ и отображает его на отрезок $[a,\ b]$.

Если φ возрастает, то $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,.$$

В случае убывания $\varphi(\alpha) = b, \varphi(\beta) = a$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))(-\varphi'(t))\,dt$$

Предыдущие формулы объединяются в форме

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,dt\,. \tag{2}$$

Примеры

1) $\int_{2/3}^1 (3x-2)^2\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{9}$.

2) $\int_0^1 (1-x)^5\,dx = \int_0^1 y^5 dy = \frac{1}{6}$

3) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = [x = a\sin t] = \int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\,dt = \frac{\pi a^2}{4}$.

(Заметим, что $I=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 tdt=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 tdt$, поэтому $2I=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 tdt+\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 tdt=\int\limits_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}$, так что $I=\frac{\pi}{4}$).

4) $I=\int\limits_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$, $2I=\int\limits_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\,\mathrm{arctg}\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$, $I=\frac{\pi^2}{4}$.

2^0. Интегрирование четных и нечетных функций

Если f — четная функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx. \tag{3}$$

Если f — нечетная функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=0. \tag{4}$$

Действительно, замена переменной $x=-t$ дает

$$\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx=\int\limits_0^a f(-t)dt=\int\limits_0^a f(-x)dx,$$

$$\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx+\int\limits_0^a f(x)dx=\int\limits_0^a\big(f(x)+f(-x)\big)dx,$$

что дает равенство (3) в случае четности и равенство (4) в случае нечетности.

Интегрирование периодических функций.

Если f — функция периода $T>0$, определенная на всей вещественной прямой, то

$$\forall a\quad \int\limits_a^{a+T}f(x)dx=\int\limits_0^T f(x)dx. \tag{5}$$

Действительно,

$$\int\limits_a^{a+T}f(x)dx=\int\limits_0^{a+T}f(x)dx-\int\limits_0^a f(x)dx=\int\limits_0^{a+T}f(x)dx-\int\limits_T^{a+T}f(x)dx=\int\limits_0^T f(x)dx$$

§ 10.Интегрирование по частям в определенном интеграле

1^0. Теорема 1.

Пусть функции f,g непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедлива формула интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{1}$$

Доказательство

Функция fg — первообразная для $f'g+fg'$. По формуле Ньютона-Лейбница

$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx+\int\limits_a^b f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b$, формула интегрирования по частям доказана.

Примеры

1) $\int\limits_0^1 x^2(1-x)^2\,dx = \frac{1}{3}x^3(1-x)^2\Big|_0^1 + \frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^3(1-x)\,dx = \frac{2}{3\cdot 4}\int\limits_0^1 x^4 dx = \frac{2}{3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{30}$.

2) $\int\limits_0^\pi x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi \sin x dx = \cos x\Big|_0^\pi = -2$

2^0. Интегралы $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n xdx,\ \int\limits_0^{\pi/2}\cos^n xdx$.

Замена переменной $x = \frac{\pi}{2} - y$ показывает, что эти интегралы равны между собой, положим $I_n = \int\limits_0^{\pi/2}\sin^n xdx = \int\limits_0^{\pi/2}\cos^n xdx$.

Теперь $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Если $n > 1$, то интегрирование по частям дает

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2}\sin^n xdx = \int\limits_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\left(1-\cos^2 x\right)dx = \int\limits_0^{\pi/2}\sin^{n-2}xdx - \int\limits_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2}\sin^{n-2}xdx - \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n xdx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1}I_n,$$

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

Для четного n получаем

$$I_n = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}$$

Для нечетного n

$$I_n = \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}$$

3^0. Формула Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}.$$

Запишем неравенство

$$\sin^{2n+1}x \le \sin^{2n}x \le \sin^{2n-1}x.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \le \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1} \le \frac{\pi}{2} \le \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n}.$$

Поскольку разность между правой и левой частями бесконечно мала $\left(\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n} - \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1} = \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}\left(\frac{2n+1}{2n}-1\right) \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}\underset{n\to\infty}{\to} 0\right)$, то

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}.$$

4⁰. Формула Тейлора с интегральным остаточным членом

Теорема 2.

Если f непрерывно дифференцируема, то

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,dt.$$

Если f дважды непрерывно дифференцируема, то

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,dt=f(x_0)-(x-t)f'(t)\Big|_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,dt$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}(x-t)f''(t)\,dt$$

Если f непрерывно дифференцируема $(n+1)$ раз, то

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \qquad (2)$$

Получена запись остаточного члена в интегральной форме:

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \qquad (3)$$

Применяя интегральную теорему о среднем, можем еще раз получить для остаточного члена форму Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1} \qquad (4)$$

и форму Коши

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\int_{x_0}^{x}dt=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0). \qquad (5)$$

5⁰. Вторая теорема о среднем

Теорема 3.

Пусть f интегрируема на отрезке $[a,\,b]$, а g монотонна на этом же отрезке.

Тогда

$$\exists\xi\in[a,\,b]\quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\,dx+g(b)\int_{\xi}^{b}f(x)\,dx.$$

Доказательство сначала проведем в предположении непрерывности f и непрерывной дифференцируемости g.

Введем в рассмотрение функцию $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Интегрирование по частям дает

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=F(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)g'(x)\,dx=F(b)g(b)-\int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

По первой теореме о среднем

$$\exists \xi \in [a, b] \quad \int_a^b F(x) g'(x) dx = F(\xi) \int_a^b g'(x) dx = F(\xi)\big(g(b) - g(a)\big).$$

Получается равенство

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = F(b) g(b) - F(\xi)\big(g(b) - g(a)\big) =$$
$$= g(a) F(\xi) + g(b)\big(F(b) - F(\xi)\big) =$$
$$= g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx + g(b) \int_{\xi}^b f(x) dx$$

Теперь докажем теорему в общем случае.

Лемма. Формула Бонне.

Пусть f интегрируема на отрезке $[a, b]$, а g убывает и положительна на этом же отрезке.

Тогда

$$\exists \xi \in [a, b] \quad I = \int_a^b f(x) g(x) dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx .$$

Доказательство.

Рассмотрим разбиение τ_n отрезка $[a, b]$ на n равных частей; $x_k = a + \dfrac{b-a}{n} k$.

Запишем для интеграла представление

$$I = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) g(x) dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) g(x_{k-1}) dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\big(g(x_{k-1}) - g(x)\big) dx .$$

Записанные выше суммы обозначим через A_n, B_n соответственно. Для второй суммы можем написать

$$|B_n| \le L \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \big(g(x_{k-1}) - g(x)\big) dx = L\left(\sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \Delta x_k - J\right) \underset{n\to\infty}{\to} L(J - J) = 0$$

(здесь $L = \sup |f|([a, b])$, $J = \int_a^b g(x) dx$).

Первую сумму подвергнем преобразованию Абеля, обозначая через F интеграл с переменным верхним пределом для функции f :

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) F(x_k) - \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k) F(x_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \big(g(x_{k-1}) - g(x_k)\big) F(x_k) + g(x_{n-1}) F(x_n).$$

Обозначим через m, M наименьшее и наибольшее значения функции F . С учетом убывания и положительности функции g получаем

$$A_n \le M \sum_{k=1}^{n-1} \big(g(x_{k-1}) - g(x_k)\big) + M g(x_{n-1}) = M g(x_0) = M g(a)$$

и точно так же $A_n \ge m g(x_0) = m g(a)$.

Получаем неравенство

$$m g(a) + B_n \le I = A_n + B_n \le M g(a) + B_n ,$$

которое после предельного перехода принимает вид

$$m g(a) \le I \le M g(a) .$$

Поскольку F — непрерывная функция, найдется $\xi \in [a, b]$, для которого $I = g(a) F(\xi)$, т.е. $I = g(a) \int_a^{\xi} f(x) dx$.

Если функция g убывает, но не является положительной, формула Бонне применима к интегралу $\int_a^b f(x)\big(g(x) - g(b)\big) dx$. Найдется

$\xi \in [a, b]$, для которого

$$\int_a^b f(x)\big(g(x)-g(b)\big)dx = \big(g(a)-g(b)\big)\int_a^\xi f(x)dx \ ,$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \big(g(a)-g(b)\big)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

Если функция g возрастает, то $(-g)$ убывает и

$$\int_a^b f(x)\big(-g(x)\big)dx = -g(a)\int_a^\xi f(x)dx - g(b)\int_\xi^b f(x)dx \ ,$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx \ .$$