Лекция 4 13.09.2024

§ 11. Мощность множества

1⁰. Определение

Пусть X, Y — множества.

Если существует биекция

$$f: X \to Y$$

то мы скажем, что эти множества равномощны (имеют одинаковую мощность) и напишем

$$\operatorname{card} X = \operatorname{card} Y \ \ (|X| = |Y|,\ X \sim Y)$$

Если существует инъекция

$$f: X \to Y$$

то мы скажем, что мощность множества X не превосходит мощности множества Y,

$$|X| \le |Y|.$$

Любые два множества сравнимы по мощности. Если X, Y — множества, то $|X| \le |Y|$ или $|X| \ge |Y|$.

При этом запись $|X| > |Y|$ означает, что $|X| \ge |Y|$ и $|X| \ne |Y|$.

2⁰. Теорема 1. (теорема Шредера-Бернштейна)

Если $|X| \le |Y|$ и $|X| \ge |Y|$, то $|X| = |Y|$.

Теорему примем без доказательства.

3⁰. Теорема 2. (теорема Кантора).

Пусть X — некоторое множество, $P(X)$ — множество подмножеств множества X,

$$Y \in P(X) \Leftrightarrow Y \subset X.$$

Тогда

$$|P(X)| > |X|.$$

Доказательство.

Допустим,

$$f : X \to P(X) \text{ — сюръекция.}$$

Рассмотрим множество

$$X_0 = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Поскольку f — сюръекция, то

$$\exists x_0 \in X \quad f(x_0) = X_0 .$$

Принадлежит ли x_0 множеству X_0?

Предположение $x_0 \in X_0$ приводит к выводу о том, что $x_0 \notin f(x_0) = X_0$. Получается противоречие, которое заставляет нас отвергнуть предположение.

Но и предположение $x_0 \notin X_0 = f(x_0)$ ведет к противоречию, поскольку влечет за собой условие $x_0 \in X_0$.

Сказанное означает, что отвергнуть мы должны условие сюръективности отображения f.

Т.2 показывает, что не существует множества наибольшей мощности, Множество $P(X)$ подмножеств множества X, имеет большую мощность, чем множество X,

$$|P(X)| > |X|.$$

Мощность множества $P(X)$ обозначают через $2^{|X|}$.

4^0. Конечные множества

Множество

$$\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \le n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$$

называется отрезком натурального ряда.

Если $X \sim \mathbb{N}_n$, то множество X называется конечным.

Можно показать, что различные отрезки натурального ряда не равномощны между собой. Если $X \sim \mathbb{N}_n$, то n называется числом элементов множества X, $|X| = n$. Число элементов определено однозначно.

Пустое множество $\varnothing$ конечно, $|X| = 0$.

Предложение

X конечно $\Leftrightarrow$ X не равномощно своей правильной части.

Множество, не являющееся конечным, называется бесконечным.

Так, множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, бесконечно, функция

$$f : n \to n+1$$

является биекцией $\mathbb{N}$ на его правильную часть $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

5⁰. Счетные множества

Определение

Множество X называется счетным, если $X \sim \mathbb{N}$.

Если множество X счетно, то пишут $|X| = \aleph_0$ (алеф-0).

Если $|X| \le \aleph_0$, множество X называется не более чем счетным.

Если $|X| > \aleph_0$, множество X называется несчетным.

Если множество X бесконечно, то для любого натурального n можно найти n различных элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ множества X, существует последовательность с попарно различными членами, состоящая из элементов множества X. Таким образом, всякое бесконечное множество имеет счетное подмножество. Счетное множество — наименьшее среди бесконечных множеств.

Предложение

$$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}.$$

Доказательство

Биекцию $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ можно определить формулами

$$f(n) = 2n+1 \text{ для } n \ge 0,$$

$$f(n) = -2n \text{ для } n < 0.$$

Предложение

Объединение конечного числа счетных множеств счетно.

Предложение

$$\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$$

Доказательство

Нумерацию элементов $\mathbb{N}^2$ можно провести по следующей схеме

$$\begin{array}{cccc}
1 & 3 & 6 & 10 \\
(1,\, 1) & (1,\, 2) & (1,\, 3) & (1,\, 4) \\
 & & & \\
2 & 5 & 9 & \\
(2,\, 1) & (2,\, 2) & (2,\, 3) & \\
 & & & \\
4 & 8 & & \\
(3,\, 1) & (3,\, 2) & & \\
 & & & \\
7 & & & \\
(4,\, 1) & & &
\end{array}$$

Предложение

Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно.

Доказательство

Каждое $q \in \mathbb{Q}$ единственным образом представляется несократимой дробью

$$q = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Тем самым построено взаимно однозначное отображение $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Получаем неравенство

$$|\mathbb{Q}| \le |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|\,.$$

Поскольку еще $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N},\ |\mathbb{Q}| \ge |\mathbb{N}|$, то $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, множество рациональных чисел счетно

6^0. Мощность континуума

Предложение

$$\mathbb{R} \sim P(\mathbb{N})\,.$$

Доказательство.

1) Поставив каждому $x \in \mathbb{R}$ в соответствие подмножество $(-\infty,\ x) \cap \mathbb{Q}$ множества рациональных чисел, мы получаем инъекцию $\mathbb{R} \to P(\mathbb{Q})$. Таким образом,

$$|\mathbb{R}| \le |P(\mathbb{Q})| = |P(\mathbb{N})|$$

2) Для того чтобы убедиться в справедливости противоположного неравенства, следует взаимно однозначно отобразить $P(\mathbb{N})$ в $\mathbb{R}$.

Пусть $Y \subset \mathbb{N}$, положим

$$a_n = \begin{cases} 1, \ n \in Y, \\ 0, \ n \notin Y, \end{cases}$$

а в качестве $y = f(Y)$ возьмем вещественное число $y = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ ($y_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots$).

Проведенное построение дает право сказать, что $|P(\mathbb{N})| \le |\mathbb{R}|$.

Определение

Если $X \sim P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, то X имеет мощность континуума, $|X| = 2^{\aleph_0} = c$.

Замечание

Невырожденный промежуток имеет ту же мощность, что и все множество вещественных чисел. Например, биекцию

$$f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$$

можно определить формулой

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$