Лекция 3 16.09.2025 (3 часа)

Глава IV. Степенные ряды

§1. Понятие степенного ряда

1⁰. Определение

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right)+\cdots+a_n\left(x-x_0\right)^n+\cdots \qquad (1)$$

называется степным рядом (с центром разложения x_0 и коэффициентами $a_0, a_1, \ldots$).

Степенной ряд — это функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n$, состоящий из степенных функций $\varphi_n : \varphi_n\left(x\right)=a_n\left(x-x_0\right)^n$. Степенной ряд — обобщение полинома.

2⁰. Примеры

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Если $x \neq 0$, то $\dfrac{\left|x^{n+1}/(n+1)!\right|}{\left|x^n/n!\right|}=\dfrac{|x|}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}0$. По признаку Даламбера ряд абсолютно сходится.

Рассматриваемый степенной ряд сходится на всей вещественной прямой. Такой степенной ряд называется всюду сходящимся.

2) Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ сходится только в точке $x=0$. Это всюду расходящийся ряд.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ абсолютно сходится, если $|x|\le 1$, и расходится, если $|x|>1$.

§2. Радиус и интервал сходимости степенного ряда

1⁰ Теорема 1. I теорема Абеля

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n \text{ —} \qquad (1)$$

степенной ряд.

Если ряд (1) сходится в некоторой точке $x_1 \neq x_0$, то этот ряд абсолютно сходится во всякой точке x, удовлетворяющей неравенству $|x-x_0|<|x_1-x_0|$.

Доказательство.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$.

$$\left|a_n\left(x-x_0\right)^n\right|=\left|a_n\left(x_1-x_0\right)^n\right|\cdot\left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^n. \tag{2}$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(x_1-x_0\right)^n$ сходится, поэтому $a_n\left(x_1-x_0\right)^n\underset{n\to\infty}{\to}0$ и последовательность $\left\{a_n\left(x_1-x_0\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ ограничена, т.е. $\exists M>0\ \left|a_n\left(x_1-x_0\right)^n\right|\le M\ \ (n=0,1,\dots)$.

Положим $q=\left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|\in\left[0,\,1\right)$. Теперь из (2) получается

$$\left|a_n\left(x-x_0\right)^n\right|\le Mq^n, \tag{3}$$

и с учетом сходимости геометрического ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n$ теорема сравнения дает абсолютную сходимость ряда (1) в точке x.

Замечание.

Условие сходимости ряда в точке $x_1\ne x_0$ можно заменить на $a_n\left(x_1-x_0\right)^n\underset{n\to\infty}{\to}0$ или даже на ограниченность $\left\{a_n\left(x_1-x_0\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$

2^0 Теорема 2. О радиусе сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\ — \tag{1}$$

степенной ряд.

Тогда существует и единственно такое число $R\in\left[0,\,+\infty\right]$, что

$$\left|x-x_0\right|<R\Rightarrow\text{ (1) абсолютно сходится в точке } x, \tag{4}$$

$$\left|x-x_0\right|>R\Rightarrow\text{ (1) расходится в точке } x, \tag{5}$$

с нарушением необходимого условия сходимости.

Доказательство.

Единственность числа R не вызывает сомнений.

Пусть E — множество сходимости степенного ряда (1).

а) $E=\left\{x_0\right\}$, положим $R=0$. Условие (4) вырождается, его следует признать выполненным. Условие (5) выполняется.

б) E — неограниченное множество, положим $R=+\infty$. Здесь $E=\mathbb{R}$, ряд всюду абсолютно сходится. Действительно, для любого x можно найти такое $x_1\in E$, что $\left|x_1-x_0\right|>\left|x-x_0\right|$.

Поскольку ряд (1) сходится в точке x_1, то по I теореме Абеля (1) абсолютно сходится в точке x.

в) Пусть теперь $E\ne\left\{x_0\right\}$ — ограниченное множество, положим $R=\sup\limits_{x\in E}\left|x-x_0\right|\in\left(0,\,+\infty\right)$.

Пусть $\left|x-x_0\right|<R$, тогда $\exists x_1\in E\ \left|x_1-x_0\right|>\left|x-x_0\right|$. По I теореме Абеля (1) абсолютно сходится в точке x.

Пусть $|x-x_0|>R$, тогда $x\notin E$, ряд расходится. (Если допустить выполнение необходимого условия сходимости, то из доказательства I теоремы Абеля следует, что ряд сходится в любой точке x_2, такой что $|x_2-x_0|<|x-x_0|$ и $R\geq|x-x_0|$).

3^0 Определение.

Число R, удовлетворяющее условиям (4), (5), называется радиусом сходимости степенного ряда (1).
Интервал $\left(x_0-R,\ x_0+R\right)$ (в случае, если $R>0$) называется интервалом сходимости.
Множество сходимости имеет вид $E=\left\langle x_0-R,\ x_0+R\right\rangle$.

4^0 Примеры

1) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ имеет радиус сходимости $R=+\infty$.

2) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$ имеет радиус сходимости $R=0$.

3) Геометрический ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ имеет радиус сходимости $R=1$, в точках $\left(\pm1\right)$ ряд расходится.

4) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ имеет радиус сходимости $R=1$, в точке 1 ряд расходится, в точке $\left(-1\right)$ — условно сходится.

5) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ имеет радиус сходимости $R=1$, в точках $\left(\pm1\right)$ ряд абсолютно сходится.

5^0 Дополнения.

1) Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, то $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

2) Если существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, то $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

3) В общем случае имеет место формула Коши-Адамара

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}. \tag{6}$$

Действительно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n}=\dfrac{|x-x_0|}{R}$. Если $|x-x_0|<R$, то по радикальному признаку Коши ряд абсолютно сходится, если $|x-x_0|>R$, ряд расходится с нарушением необходимого условия. R — радиус сходимости.

§3. Равномерная сходимость степенного ряда

1^0 Теорема 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n \text{ —} \tag{1}$$

степенной ряд.
$R>0$ — радиус сходимости, $0<r<R$.
Тогда ряд (1) равномерно сходится на $\left[x_0-r,\ x_0+r\right]$.
Доказательство.
Ряд (1) абсолютно сходится в точке $x_1=x_0+r$, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n\right|r^n$.
Поскольку

$$\forall x\in\left[x_0-r,\ x_0+r\right]\quad \left|a_n\left(x-x_0\right)^n\right|\le\left|a_n\right|r^n,$$

то по признаку Вейерштрасса ряд (1) равномерно сходится на отрезке $\left[x_0-r,\ x_0+r\right]$.
Следствие. Сумма степенного ряда непрерывна на интервале сходимости.

$$f:f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n,\ x\in\left(x_0-R,\ x_0+R\right).$$

Тогда f непрерывна на $\left(x_0-R,\ x_0+R\right)$.
Доказательство.
Возьмем произвольную точку $x\in\left(x_0-R,\ x_0+R\right)$ и подберем $r\in\left(0,\ R\right)$ так, чтобы $x\in\left(x_0-r,\ x_0+r\right)$. По теореме 1 ряд (1) равномерно сходится на отрезке $\left[x_0-r,\ x_0+r\right]$, поэтому функция f непрерывна на $\left(x_0-r,\ x_0+r\right)$, в частности, она непрерывна в точке x.
(Здесь существенно, что x — внутренняя точка отрезка $\left[x_0-r,\ x_0+r\right]$. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда дает непрерывность функции $f_1=f\big|_{\left[x_0-r,\ x_0+r\right]}$ — сужения функции f на отрезок $\left[x_0-r,\ x_0+r\right]$. Непрерывность — локальное свойство, определяется поведением функции в окрестности исследуемой точки. Функции же f и f_1 совпадают на отрезке $\left[x_0-r,\ x_0+r\right]$, который является окрестностью точки x).

2^0 Теорема 2. II теорема Абеля

Пусть (1) сходится в точке x_0+R, т.е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$.
Тогда ряд (1) равномерно сходится на $\left[x_0,\ x_0+R\right]$.
Аналогично, сходимость ряда в точке x_0-R влечет за собой равномерную сходимость на $\left[x_0-R,\ x_0\right]$.
Доказательство.
Применим признак Абеля. Ряд (1) запишем в виде $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n\dfrac{\left(x-x_0\right)^n}{R^n}$. Здесь ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ сходится, а последовательность $\left\{\dfrac{\left(x-x_0\right)^n}{R^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ монотонна при каждом $x\in\left[x_0,\ x_0+R\right]$ и равномерно ограничена ($0\le\dfrac{\left(x-x_0\right)^n}{R^n}\le1$). Ряд равномерно сходится по признаку Абеля.
Интересно провести и прямое доказательство. Для простоты рассмотрим случай $x_0=0,\ R=1$.

Предполагается сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.Положим $A_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, $M_n = \max\left\{|A_n|, |A_{n+1}|, \ldots\right\}$. Тогда

$$A_n \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ M_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

При $x \in (0, 1)$ можно написать

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(A_{k-1} - A_k\right) x^k = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k x^k =$$

$$= \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k x^k = A_n x^{n+1} + (x-1) \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k x^k - A_{n+p} x^{n+p}.$$

Переход к пределу (при $p \to \infty$) дает выражение для остатка ряда

$$r_n(x) = A_n x^{n+1} + (x-1) \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k x^k ,$$

из которого получается оценка

$$\left|r_n(x)\right| \le |A_n| x^{n+1} + (1-x) M_n \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k =$$

$$= |A_n| x^{n+1} + (1-x) M_n \frac{x^{n+1}}{1-x} \le 2M_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Итак,

$$\forall x \in [0, 1]\ \left|r_n(x)\right| \le 2M_n \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

$$r_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \mathbf{0}.$$

Следствие. В условиях теоремы 2 сумма степенного ряда непрерывна на $\left[x_0,\ x_0 + R\right]$.

§4. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов

Теорема 1.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ —} \tag{1}$$

степенной ряд с радиусом сходимости $R > 0$.
Рассмотрим ряды

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1)(x - x_0)^n \tag{2}$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x - x_0)^n , \tag{3}$$

полученные почленным дифференцированием и интегрированием ряда (1).
Тогда ряды (2), (3) имеют тот же радиус сходимости R . Функция φ , сумма ряда (2), — производная, а функция F , сумма ряда (3), — первообразная для функции f на интервале сходимости.
Доказательство. 1) Пусть R' — радиус сходимости ряда (2). Докажем, что $R' = R$.

Возьмем произвольный $x \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$, $x \neq x_0$. Подберем $x_1 \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$ так, чтобы $|x_1 - x_0| > |x - x_0|$. Положим $q = \left|\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right| < 1$. Ряд (1) абсолютно сходится в точке x_1, поэтому $\exists M > 0\ \left|a_n (x_1 - x_0)^n\right| \le M\ \ (n = 0, 1, \ldots)$.

Запишем член ряда (2) в виде

$$a_n n (x - x_0)^{n-1} = \frac{1}{x - x_0} a_n (x_1 - x_0)^n\, n \frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n}. \tag{4}$$

Из (4) получается оценка

$$\left|a_n n (x - x_0)^{n-1}\right| \le \frac{M}{|x - x_0|} n q^n. \tag{5}$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n q^n$ сходится (по признаку Даламбера), то теорема сравнения дает абсолютную сходимость ряда (2) в точке x. Получается, что.

$(x_0 - R,\ x_0 + R) \subset [x_0 - R',\ x_0 + R']$ и, стало быть, $R' \ge R$.

Неравенство $R \ge R'$ можно считать очевидным, поскольку неравенство

$$\left|a_n (x - x_0)^n\right| \le |x - x_0| \cdot \left|a_n n (x - x_0)^{n-1}\right|$$

влечет абсолютную сходимость ряда (1) в каждой точке абсолютной сходимости ряда (2). Итак, $R' = R$.

2) $\forall r \in (0,\ R)$ ряды (1), (2) равномерно сходятся на $[x_0 - r,\ x_0 + r]$. По теореме о почленном дифференцировании равномерно сходящихся рядов f дифференцируема на $(x_0 - r,\ x_0 + r)$ и $f' = \varphi$. Поскольку r выбиралось произвольно, то $f' = \varphi$ на всем интервале сходимости $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

3) Ряды (3) и (1) связаны между собой так же, как (1) и (2). (Положительность радиуса сходимости ряда (3) получается из оценки

$$\left|\frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}\right| \le |x - x_0| \left|a_n (x - x_0)^n\right|).$$

Следовательно, ряд (3) имеет радиус сходимости R, $F' = f$, F — первообразная для f на $(x_0 - R,\ x_0 + R)$.

Следствия. 1) Функция, представленная суммой степенного ряда, имеет на интервале сходимости производные всех порядков. Производные можно найти почленным дифференцированием ряда.

2) Если ряд (1) сходится в точке x, то

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

§5. Ряд Тейлора

1[0]. Единственность разложения функции в степенной ряд

Теорема 1

Пусть на интервале $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ функция f представлена в виде суммы степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1}$$

Тогда

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0),\ n = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Доказательство.

Пользуясь правом дифференцирования степенных рядов, для производных функции f получаем выражения

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x - x_0)^{n-1},$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n (n-1)(x - x_0)^{n-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n n (n-1) \cdots (n - m + 1)(x - x_0)^{n-m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

При $x = x_0$ имеем

$$f(x_0) = a_0,\ f'(x_0) = 1 \cdot a_1,\ f''(x_0) = 2! a_2, \ldots,\ f^{(m)}(x_0) = m! a_m, \ldots,$$

что приводит к формулам (2).

2[0]. Определение

Пусть функция f имеет производные всех порядков в точке x_0.
Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции f по степеням $x - x_0$ (с центром разложения в точке x_0).
Коэффициенты этого ряда — коэффициенты Тейлора функции f.
Частичные суммы ряда Тейлора — это многочлены Тейлора T_n функции f.

$$R_n = f - T_n \text{ —}$$

остаточный член формулы Тейлора.
Если функция представляется суммой степенного ряда, то это представление единственно.
Функция оказывается суммой своего ряда Тейлора.