Лекция 3 22.09.2023 (3 часа)

§6. Условия разложимости функции в ряд Тейлора

1^0. Предложение 1.

Пусть функция f определена и имеет производные всех порядков на интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$.

Для разложимости функции f в ряд Тейлора необходимо и достаточно условие

$$\forall x\in(x_0-h,\ x_0+h)\ R_n(x)=f(x)-T_n(x)\underset{n}{\to}0.$$

Если f — сумма ряда Тейлора, то

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \ —$$

сумма остатка ряда Тейлора.

2^0. Предложение 2.

Пусть функция f определена и имеет производные всех порядков на интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$.

и

$$\exists M>0\ \ \forall x\in(x_0-h,\ x_0+h),\ n=0,1,2,\dots\ \left|f^{(n)}(x)\right|\le M.$$

Тогда на интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$ функция f разлагается в ряд Тейлора,

$$\forall x\in(x_0-h,\ x_0+h)\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.$$

Доказательство.

Представим остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1},$$

где ξ — некоторая точка между x и x_0.

Из этого представления получается оценка

$$\left|R_n(x)\right|\le\frac{M}{(n+1)!}h^{n+1}\underset{n}{\to}0.$$

По предложению 1 функция f разлагается в ряд Тейлора.

3^0. Может случиться, что функция имеет производные всех порядков, но в степенной ряд не разлагается. В качестве примера можно предложить функцию

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\ne0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

При $x\ne0$ она имеет производные всех порядков:

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\ f''(x)=\left(-\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\ P_n \text{ - многочлен (степени 3n).}$$

В точке $x=0$ функция имеет нулевые производные всех порядков:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0 \text{ } при \text{ } x\to 0\,.$$

Далее применяем индукцию. Допустим, что утверждение верно для всех производных до n-го порядка включительно. Тогда

$$\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\frac{\frac{1}{x}P_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}}\to 0 \text{ } при \text{ } x\to 0\,,$$

и $f^{(n+1)}(0)=0$.

Ряд Тейлора оказывается нулевым, и ни для одного $x\neq 0$ значение функции $f(x)$ не равно сумме этого ряда.

§ 7. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора

1^0. Теорема 1

Имеют место следующие разложения:

I $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ x\in(-\infty,+\infty)$,

II $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty,+\infty)$,

III $\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x\in(-\infty,+\infty)$,

IV $(1+x)^{\mu}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n,\ x\in(-1,1)$,

V $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,1]$.

Доказательство.

I) Пусть $f(x)=e^x$.Возьмем произвольное $h>0$ и положим $M=e^h$. Тогда

$$\forall x\in(-h,h),\ n=0,1,2,\ldots\ \left|f^{(n)}(x)\right|\le M\,.$$

Поэтому разложение I) справедливо на интервале $(-h,h)$. Поскольку h выбрано произвольно, то разложение справедливо на всей вещественной прямой.
Разложения II),III) выводятся вполне аналогично, при этом можно взять $M=1$.
Обратимся к формуле IV).

Если $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, ряд IV оказывается конечной суммой. Равенство IV — биномиальная формула Ньютона. В остальных случаях в IV мы видим настоящий ряд с радиусом сходимости $R = 1$. Этот ряд называется биномиальным.

Начнем с частных случаев.

При $\mu = -1$ формула IV принимает вид

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n , \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

и хорошо нам знакома.

Дифференцируя степенные ряды, приходим к разложениям

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n , \quad \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n ;$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n , \quad \frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n .$$

Обратимся к общему случаю.

Пусть $x \in (-1, 1)$. Запишем остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n \, dt .$$

Здесь $f(x) = (1+x)^{\mu}$, $f^{(n+1)}(x) = \mu(\mu-1)(\mu-n)(1+x)^{\mu-n-1}$ так что

$$R_n(x) = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{n!} \int_0^x (1+t)^{\mu-n-1} (x-t)^n \, dt .$$

Запишем подынтегральную функцию в виде

$$\varphi(t) = (1+t)^{\mu-n-1} (x-t)^n = (1+t)^{\mu-1} \left(\frac{x-t}{1+t} \right)^n .$$

Первый сомножитель — ограниченная функция: $(1+t)^{\mu-1} \le C$. Дробно-линейная функция $\dfrac{x-t}{1+t}$ монотонна на любом промежутке, входящем в ее область определения, и принимает наибольшее и наименьшее значения на концах промежутка, таковыми значениями оказываются 0 и x.

Получаем оценку

$$|\varphi(t)| \le C |x|^n$$

и

$$|R_n(x)| \le C \frac{|\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)|}{n!} |x|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

(стремление к нулю вытекает из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{|\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)|}{n!} |x|^{n+1}$).

Формула IV доказана.

Перейдем к логарифмическому ряду V. Разложение получается интегрированием соотношения $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$. Действительно, при $x \in (-1, 1)$ получим

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ сходится, то на основе второй теоремы Абеля можно перейти к пределу при $x\to 1-0$ и получить равенство

$$\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Формула V установлена и для $x=1$.

2⁰. Формула Стирлинга

Теорема 2

Для каждого натурального n найдется число $\theta_n\in(0,1)$, т.ч.

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$$

$$n!\underset{n\to\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$. Ее производная $f'(x)=\frac{2}{1-x^2}$ разлагается в ряд Тейлора на интервале $(-1,1)$:

$$f'(x)=2\left(1+x^2+x^4+\cdots\right)$$

Интегрируя, получаем равенство

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right),$$

из которого при $x\in(0,1)$ получаем неравенство

$$2x<\ln\frac{1+x}{1-x}<2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{3}+\cdots\right)=2x\left(1+\frac{x^2}{3}\frac{1}{1-x^2}\right).$$

В полученном неравенстве положим $x=\frac{1}{2n+1}$:

$$\frac{2}{2n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{3(2n+1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}}\right)=\frac{2}{2n+1}\left(1+\frac{1}{12n(n+1)}\right);$$

$$1<\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1+\frac{1}{12n(n+1)}.$$

Потенцирование дает неравенство

$$e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}};$$

$$1<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Рассмотрим теперь последовательность

$$a_n=\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Для этой последовательности

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{e(n+1)n^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}$$

Поэтому

$$1<\frac{a_n}{a_{n+1}}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}=\frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — положительная убывающая последовательность. Следовательно, она сходится.

Положим $a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Последовательность $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ возрастает и имеет предел a. При любом натуральном n выполняется неравенство

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}}<a<a_n,$$

так что найдется такое $\theta_n\in(0,1)$, что $a_n=ae^{\frac{\theta_n}{12n}}$, т.е.

$$n!=a\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}=a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

Осталось показать, что $a=\sqrt{2\pi}$.

По формуле Валлиса

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}\underset{n}{\to}\frac{\pi}{2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{\left((2n)!!\right)^2}{(2n)!}=\frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n)!}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{2^{2n}a^2n\cdot n^{2n}e^{2n}}{e^{2n}a\cdot\sqrt{2n}(2n)^{2n}}=\frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{2}},$$

поэтому $\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}\underset{n}{\to}\frac{a^2}{4}$.

Стало быть, $\frac{a^2}{4}=\frac{\pi}{2},\ a^2=2\pi,\ a=\sqrt{2\pi}$, что и требовалось.

3^0. Дополним список разложениями

VI $\operatorname{ch} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty,+\infty)$,

VII $\operatorname{sh} x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x\in(-\infty,+\infty)$,

Доказательство.

$$\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Примеры.

1) $\operatorname{arctg} x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Действительно,

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Интегрирование дает

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\ x\in(-1,1).$$

Вторая теорема Абеля дает возможность перейти к пределу и установить справедливость формулы и при $x=\pm1$.

При $x=1$ получаем равенство

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

2)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\cdots,\ x\in(-1,1)$$

.

3) Интегрирование предыдущего дает разложение

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\cdots,\ x\in[-1,1].$$

4) $\frac{x+2}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(3n+2)x^n,\ x\in(-1,1)$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6$.

6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} = 3e$.

§8. Действия над степенными рядами

Для сокращения записей будем сейчас рассматривать ряды с центром разложения в нуле

1^0. Линейная комбинация степенных рядов

Пусть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ x \in (-R_1,\ R_1), \tag{1}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,\ x \in (-R_2,\ R_2) \tag{2}$$

— степенные ряды, α, β — вещественные числа.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$ сходится по крайней мере на $(-R,\ R)$, где $R = \min\{R_1,\ R_2\}$ и имеет сумму $\alpha f + \beta g$.

2^0. Умножение степенных рядов

В условиях предыдущего пункта сформируем произведение в форме Коши рядов (1) и (2). k-й член ряд имеет вид

$$\sum_{j=0}^{k} \left(a_j x^j\right)\left(b_{k-j} x^{k-j}\right) = \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) x^k,$$

мы получаем новый степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}\right) x^k. \tag{3}$$

Ряд (3) сходится по крайней мере на $(-R,\ R)$, где $R = \min\{R_1,\ R_2\}$, и имеет сумму fg.

3^0. Подстановка ряда в ряд

Пусть

$$f : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ |x| < R,$$

$$g : g(y) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m y^m,\ |y| < r.$$

Пусть $|b_0| < R$.

Тогда в некоторой окрестности нуля имеет смысл композиция $F = f \circ g$, функция F разлагается в степенной ряд.

Утверждение примем без доказательства. Ограничимся планом работы.

$$F(y) = f(g(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (g(y))^n \ .$$

Выполняя умножение рядов, можно построить степенной ряд для функции g^n:

$$(g(y))^n = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(n)} y^m \ .$$

Определение функции F принимает вид

$$F(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n c_m^{(n)} \right) y^m = \sum_{m=0}^{\infty} A_m y^m \text{, где } A_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_m^{(n)} \ .$$