

§ 4 Формула Грина

Теорема 1.

Пусть G — область на плоскости, ограниченная простым контуром Γ . P, Q непрерывно дифференцируемы на \bar{G} .

Тогда имеет место формула Грина

$$\oint_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint_{\bar{G}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (1)$$

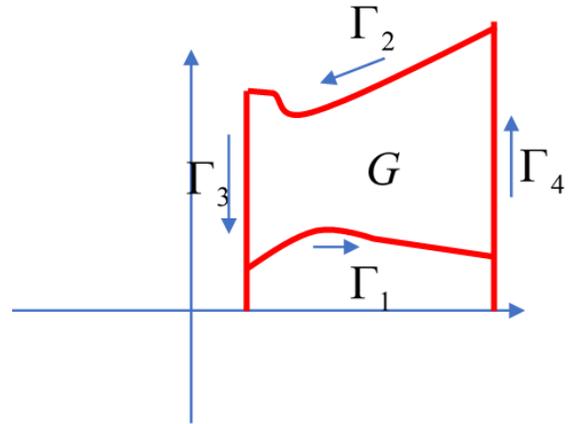
Γ^+ — положительно ориентированный (пробегаемый в направлении против часовой стрелки) контур.

Доказательство.

Докажем формулу

$$\oint_{\Gamma^+} Pdx = - \iint_{\bar{G}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \quad (2)$$

Пусть сначала G — криволинейная трапеция, $\bar{G} = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, контур Γ состоит из четырех участков: графика Γ_1 функции φ , пробегаемого слева направо, графика Γ_2 функции ψ , пробегаемого справа налево, и вертикальных отрезков Γ_3, Γ_4 . При этом



$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} Pdx &= \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx, \quad \int_{\Gamma_2} Pdx = - \int_a^b P(x, \psi(x)) dx, \quad \int_{\Gamma_3} Pdx = \int_{\Gamma_4} Pdx = 0. \\ \iint_{\bar{G}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} (x, y) dy = \int_a^b dx P(x, y) \Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} = \\ &= \int_a^b (P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))) dx = - \int_{\Gamma_2} P dx - \int_{\Gamma_1} P dx = - \int_{\Gamma} P dx. \end{aligned}$$

Более сложное множество следует вспомогательными линиями разрезать на части G_1, \dots, G_m рассмотренного вида.

$$\iint_{\bar{G}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_{i=1}^m \iint_{\bar{G}_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \sum_{i=1}^m \oint_{\Gamma_i^+} Pdx = - \oint_{\Gamma^+} Pdx$$

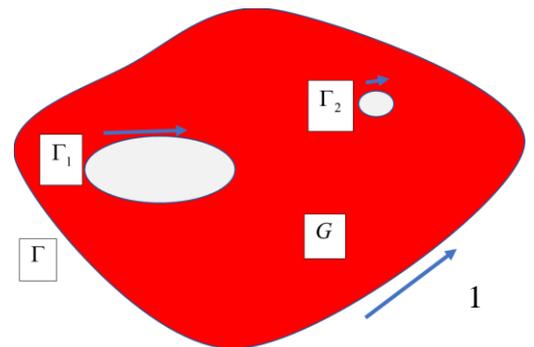
(в сумме интегралы по всем вспомогательным линиям встречаются дважды с противоположными ориентациями, интегралы по вспомогательным линиям взаимно уничтожаются, остальные линии вместе составляют контур Γ^+).

Следствие.

$$\mu \bar{G} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma^+} xdy - ydx.$$

Дополнение. Формула Грина для многосвязной области.

$$\oint_{\Gamma^+} Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^m \oint_{\Gamma_i^+} Pdx + Qdy = \iint_{\bar{G}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$



§ 5 Условия независимости криволинейного интеграла II рода на плоскости от пути

1⁰. Понятие независимости интеграла от пути.

Пусть ω — дифференциальная форма в области G на плоскости. Мы скажем, что $\int_{\gamma} \omega$ не зависит от пути, если для любых путей в G с общим началом и общим концом интеграл принимает одинаковые значения.

Пример $\int xdy$. Рассмотрим два пути с началом $(0,0)$ и концом $(1,1)$. Первый путь γ_1 состоит из отрезка оси абсцисс и вертикального отрезка прямой $x=1$, второй γ_2 — из отрезка оси ординат и горизонтального отрезка прямой $y=1$,

$$\int_{\gamma_1} xdy = 0 + 1 = 1, \quad \int_{\gamma_2} xdy = 0 + 0 = 0.$$

Интеграл, вообще говоря, зависит от пути.

2⁰. **Предложение.** Интеграл не зависит от пути интегрирования в том и только в том случае, если интеграл равен нулю по любому замкнутому пути.

Доказательство. Пусть интеграл не зависит от пути интегрирования, γ — замкнутый путь ($\gamma: [a,b] \rightarrow G$). Выберем $c \in (a,b)$ и рассмотрим пути $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ и $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$. Путь γ является соединением путей γ_1 и γ_2 , поэтому $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$. Но пути γ_1 и $(\gamma_2)_-$ имеют общие начало и конец, так что

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{(\gamma_2)_-} \omega = -\int_{\gamma_2} \omega, \quad \int_{\gamma} \omega = 0.$$

Наоборот, если интеграл обращается в нуль на любом замкнутом пути, то для любых путей γ_1, γ_2 с общим началом и общим концом нулевое значение примет интеграл $\int_{\gamma} \omega$ по

замкнутому пути — соединению путей γ_1 $(\gamma_2)_-$, $\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0$, что и требовалось.

3⁰. Точные формы.

Определение Дифференциальная форма ω называется точной в области G , если она является дифференциалом некоторой непрерывно дифференцируемой в области G функции F , если

$$\omega = dF, \text{ т.е. } P = \frac{\partial F}{\partial x}, Q = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Функция F называется первообразной дифференциальной формы ω .

Теорема 1. 1) Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть ω — точная форма, F — ее первообразная, γ — путь с началом (x_1, y_1) и концом (x_2, y_2) .

Тогда

$$\int_{\gamma} \omega = F(x, y)|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1). \quad (1)$$

2) Интеграл от точной формы не зависит от пути.

Доказательство.

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt.$$

Рассмотрим функцию $G: G(t) = F(\varphi(t), \psi(t))$. Эта функция имеет производную

$$G' = \frac{\partial F}{\partial x} \varphi' + \frac{\partial F}{\partial y} \psi'.$$

По формуле Ньютона-Лейбница для определенного интеграла

$$\int_{\gamma} \omega = G(b) - G(a) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1).$$

Независимость интеграла от пути следует теперь из формулы Ньютона-Лейбница.

Теорема 2. О существовании первообразной

Пусть G — область на плоскости, $\omega = Pdx + Qdy$ — дифференциальная форма в G , $\int_{\gamma} \omega$ не

зависит от пути.

Тогда ω — точная форма, существует функция F , для которой $\omega = dF$.

Доказательство.

Фиксируем точку $A_0(x_0, y_0) \in G$.

Пусть $A(x, y) \in G$, соединим A_0 с A путем $\gamma_A = \gamma_{(x, y)}$ и положим

$$F(x, y) = \int_{\gamma_{x,y}} \omega.$$

Независимость интеграла от пути обеспечивает корректность определения.

Убедимся в том, что построена первообразная для дифференциальной формы ω .

Проверим, например, равенство

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P.$$

Пусть $A_1(x_1, y_1) \in G$, γ соединяет A_0 и A_1 ; $A(x_1 + h, y_1) \in G$, γ_h — прямолинейный путь, соединяющий A_1 и A :

$$\gamma_h: \begin{cases} x = x_1 + t, \\ y = y_1, \quad t \in [0, h] \end{cases}$$

Путь γ , составленный из γ_1 и γ_h , соединяет A_0 и A ,

$$F(x_1, y_1) = \int_{\gamma_1} \omega, \quad F(x_1 + h, y_1) = \int_{\gamma} \omega,$$

$$\alpha(h) = F(x_1 + h, y_1) - F(x_1, y_1) = \int_{\gamma_h} \omega = \int_0^h P(x_1 + t, y_1) dt$$

По теореме Барроу

$$\alpha'(0) = P(x_1, y_1).$$

С другой стороны, по определению частной производной

$$\alpha'(0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1).$$

Итак,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, y_1) = P(x_1, y_1).$$

Замечания

1) Строение множества первообразных.

Если F — первообразная для формы ω в области G , то и любая функция $F + C$ является первообразной. Если F_1, F_2 — первообразные, то $F_2 - F_1 = const$.

2) Построение первообразной в круге и квадрате. Если G — круг или квадрат, путь γ_A можно составить из отрезков, параллельных координатным осям. Для первообразной получаются формулы

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x, \eta) d\eta, \quad (2)$$
$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(\xi, y) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x_0, \eta) d\eta.$$

4⁰. Замкнутые формы.

Определение. Дифференциальная форма ω в области G называется замкнутой, если она локально точна, если каждая точка $(x, y) \in G$ имеет окрестность, в которой форма точна.

Пример

$$\omega = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}, \quad G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

$$\gamma: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, t \in [0, 2\pi] \end{cases} \int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0,$$

форма не является точной.

Функция

$$F_1: F_1(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

является первообразной для ω в правой и левой полуплоскостях, а функция

$$F_2: F_2(x, y) = \operatorname{arcctg} \frac{x}{y}$$

является первообразной для ω в верхней и нижней полуплоскостях, ω — замкнутая форма.

Функция

$$F: F(x, y) = \begin{cases} F_1(x, y), & x > 0, \\ F_2(x, y), & y > 0, \\ F_2(x, y) - \pi, & y < 0 \end{cases}$$

является первообразной для ω в плоскости с разрезом по отрицательной полуоси абсцисс. Попытка дальнейшего продолжения первообразной приводит к противоречию, поскольку

$$F(-1, +0) = \pi, \quad F(-1, -0) = -\pi.$$

5⁰. Гомотопия

Определение

1) Непрерывное отображение

$$\Gamma: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

называется гомотопией.

Введем в рассмотрение пути $\gamma_s, s \in [0, 1]$:

$$\gamma_s(t) = \Gamma(t, s), t \in [a, b].$$

Гомотопия — непрерывная деформация пути γ_0 в путь γ_1 .

Пути γ_0 и γ_1 называются гомотопными.

2) Пути называются гомотопными в области G , если их связывает гомотопия со значениями в G .

3) Пути называются гомотопными, как пути с общими началом и концом, если для них можно подобрать гомотопию Γ , для которой

$$\forall s \in [0, 1] \Gamma(a, s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \Gamma(b, s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$

4) Пути называются гомотопными, как замкнутые пути, если для них можно подобрать гомотопию Γ , для которой путь γ_s является замкнутым при любом $s \in [0, 1]$.

6°. Теорема 3.

Пусть ω — замкнутая форма в области G , пути γ_0 и γ_1 гомотопны в области G , как замкнутые пути.

Тогда

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega$$

Доказательство. Подберем разбиения

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b,$$

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_l = 1$$

отрезков $[a, b]$ и $[0, 1]$, настолько мелкие,

что образ $\Gamma(\Delta_{ij})$ каждого из

прямоугольников $\Delta_{ij} = [t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$

($i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, l$) лежит в области точности формы ω .

Пусть η_{ij} — контур клетки $\Delta'_{ij} = \Gamma(\Delta_{ij})$,

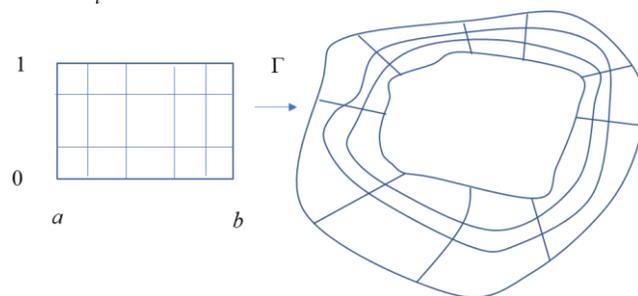
тогда

$$\int_{\eta_{ij}^+} \omega = 0, 0 = \sum_{i,j} \int_{\eta_{ij}^+} \omega = \int_{\gamma_0} \omega - \int_{\gamma_1} \omega.$$

В состав контуров η_{ij} входят участки путей γ_0 , γ_1 и вспомогательные линии. Каждая вспомогательная линия пробегается дважды в противоположных направлениях. Интегралы по вспомогательным линиям взаимно уничтожаются. Участки пути γ_0 входят в контуры η_{ij} с правильным, а участки γ_1 со встречным направлением. При суммировании формируются интегралы $\int_{\gamma_0} \omega$ и $\int_{\gamma_1} \omega$.

7°. Определение. Область G называется односвязной, если в ней каждый замкнутый путь гомотопен (как замкнутый путь) пути с одноточечным носителем (стационарному пути). В односвязной области каждый замкнутый путь стягивается в точку.

Теорема 4. Если дифференциальная форма ω замкнута в односвязной области G , то она точна.



Доказательство. Пусть γ — замкнутый путь в области G . Путь γ гомотопен некоторому стационарному пути γ_0 . По теореме 3 $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega$. Поскольку интеграл по стационарному пути равен нулю, то получается, что $\int_{\gamma} \omega = 0$ для любого замкнутого пути γ , интеграл не зависит от пути. По теореме 2 ω — точная форма.

8⁰. Аналитический признак замкнутости.

Теорема 5. $\omega = Pdx + Qdy$ — дифференциальная форма в области G , P, Q непрерывно дифференцируемы.

Тогда

$$\omega \text{ замкнута} \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ω — замкнутая форма. Для произвольной точки $(x, y) \in G$ можно подобрать окрестность V , в которой дифференциальная форма является точной. В окрестности V определена первообразная F дифференциальной формы ω ,

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Так что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ по теореме о смешанных частных производных.

Достаточность. Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in G$, подберем прямоугольник $\Pi \subset G$ с центром в этой точке. Для $(x, y) \in G$ положим

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y Q(x, \eta) d\eta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, \eta) d\eta = \\ &= P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial P}{\partial y}(x, \eta) d\eta = P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y). \end{aligned}$$

(Законность дифференцирования под знаком интеграла установим позднее).

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Итак, F — первообразная для ω в Π , ω — замкнутая форма.

9⁰. Итоги. G — односвязная область, $\omega = Pdx + Qdy$ — дифференциальная форма в G .

Равносильны условия:

1) $\int_{\gamma} \omega$ не зависит от пути;

- 2) $\int_{\gamma} \omega = 0$ для любого замкнутого пути;
- 3) ω — точная форма;
- 4) ω — замкнутая форма;
- 5) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.