Глава II. Тройной интеграл

§ 1. Тройной интеграл на параллелепипеде

1^0. $\Pi=[a_x, b_x]\times[a_y, b_y]\times[a_z, b_z]$ — параллелепипед, $\mu\Pi=(b_x-a_x)(b_y-a_y)(b_z-a_z)$ — объем (мера) параллелепипеда.

2^0. Разбиения отрезков $[a_x, b_x], [a_y, b_y], [a_z, b_z]$ порождают разбиение $\tau=\{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_m\}$ параллелепипеда Π. Набор $\xi=\{\xi_1,\ldots, \xi_m\}$, $\xi_i\in\Delta_i$ $(i=1,\ldots,m)$, называется выборкой из разбиения τ.

3^0. Пусть f — ограниченная функция на параллелепипеде Π, τ — разбиение, ξ — выборка.

$$\sigma(f,\tau,\xi)=\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\mu\Delta_i$$

называется интегральной суммой.

4^0. Число $I=\lim\limits_{\lambda_\tau\to 0}\sigma(f,\tau,\xi)$ называется тройным интегралом Римана ($\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \lambda_\tau<\delta\Rightarrow\left|I-\sigma(f,\tau,\xi)\right|<\varepsilon$). Тройной интеграл обозначается через $\int\limits_{\Pi} f,\ \int\limits_{\Pi} f(x)dx,\ \iiint\limits_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz$.

§ 2. Условия интегрируемости

1^0. Повторяя построения, выполненные для двойного интегралы, введем в рассмотрение суммы Дарбу

$$s_\tau=\sum_{i=1}^{m} m_i\mu\Delta_i \text{ и } S_\tau=\sum_{i=1}^{m} M_i\mu\Delta_i,$$

где $m_i=\inf f(\Delta_i),\ M_i=\sup f(\Delta_i),\ i=1,\ldots,m$.

2^0. Критерий Дарбу.

Теорема 1.

f интегрируема $\Leftrightarrow I_*=I^*$,

здесь $I_*=\sup\limits_{\tau} s_\tau$ — нижний интеграл, $I^*=\inf\limits_{\tau} S_\tau$ — верхний интеграл Дарбу.

3^0 Теорема 2.

Если f непрерывна, то f интегрируема.

4^0. Критерий Лебега.

Определение. Множество $e\subset\mathbb{R}^3$ есть множество меры нуль в смысле Лебега, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать систему параллелепипедов $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, такую что $e\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu\Delta_k<\varepsilon.$$

Заметим, что для компактных множеств меры нуль систему параллелепипедов можно выбрать конечной.

Действительно, пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu\Delta_k < \frac{\varepsilon}{8}$ и $e\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k$. Тогда $e\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Int\Delta_k^{(2)}$ ($\Delta_k^{(2)}$ — параллелепипед с тем же центром, что и Δ_k, но с вдвое большими линейными размерами, $\mu\Delta_k^{(2)} = 8\mu\Delta_k$).
Параллелепипеды $\Delta_k^{(2)}$ образуют открытое покрытие компакта e, поэтому найдется такое m, что
$e\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m} Int\Delta_k^{(2)}$, $e\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}\Delta_k^{(2)}$. Осталось оценить сумму объемов этих параллелепипедов:

$$\sum_{k=1}^{m}\mu\Delta_k^{(2)} = 8\sum_{k=1}^{m}\mu\Delta_k \le 8\sum_{k=1}^{\infty}\mu\Delta_k < 8\frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon .$$

1) Конечные и счетные множества являются множествами меры нуль.
2) Подмножество множества меры нуль является множеством меры нуль.
3) Объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль — множество меры нуль.
4) Невырожденный параллелепипед не является множеством меры нуль.

Пусть Δ — невырожденный параллелепипед, $V = \mu\Delta > 0$, $\Delta\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k$. Тогда $\overline{\Delta}\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Int\Delta_k^{(2)}$. Из открытого покрытия компакта $\overline{\Delta}$ параллелепипедами извлечем конечное подпокрытие $\Delta_1^{(2)},\ldots,\Delta_m^{(2)}$. Из аддитивности объема следует, что
$\sum\limits_{k=1}^{n}\mu\Delta_k^{(2)} \ge V$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu\Delta_k \ge \sum\limits_{k=1}^{n}\mu\Delta_k = \frac{\varepsilon}{8}\sum\limits_{k=1}^{n}\mu\Delta_k^{(2)} \ge \frac{V}{8}$.

5) Множество точек с рациональными координатами — множество меры нуль.
6) График непрерывной функции двух переменной — множество меры нуль.

Принято говорить, что некоторое свойство имеет место почти везде (п.в.) на множестве E, если существует множество e меры нуль, т.ч. это свойство имеет место на $E\setminus e$.

$f = 0$ п.в., f интегрируема на параллелепипеде E.
Тогда $\int\limits_E f = 0$.

Рассмотрим произвольное разбиение $\tau = \{\Delta_1,\ldots,\Delta_m\}$. Поскольку невырожденный параллелепипед к множествам меры нуль не относится, то в каждом параллелепипеде Δ_k можно указать точку ξ_k, в которой функция f обращается в нуль. В таком случае $\sigma(f,\tau,\xi) = 0$. Получается, что

$$0 = \sigma(f,\tau,\xi)\underset{\lambda_\tau\to 0}{\to}\int\limits_E f \text{ и } \int\limits_E f = 0 .$$

Теорема 3.
f интегрируема $\Leftrightarrow$ f п.в. непрерывна.

§ 3. Интеграл по множеству

1⁰. $\int\limits_E f = \int\limits_\Pi f\cdot\chi_E$, $\Pi\supset E$.

2⁰. $\mu E = \int\limits_E 1$ — мера Жордана (объем) множества E. Множества, имеющие объем, называются измеримыми. В дальнейшем интегрирование ведется только по измеримым множествам.
E измеримо $\Leftrightarrow \partial E$ — множество меры нуль.
3⁰. Ограниченная функция f интегрируема на измеримом множестве E в том и только в том случае, если f п.в. непрерывна.

§ 4. Общие свойства интеграла

1⁰. Линейность
f, g интегрируемы на множестве E. $h = \alpha f + \beta g$.
Тогда h интегрируема,

$$\int\limits_E h = \alpha \int\limits_E f + \beta \int\limits_E g . \tag{1}$$

2⁰. Аддитивность.
Пусть f — ограниченная функция на $E = E_1 \cup E_2$, E_1, E_2 измеримы.
Тогда
1) f интегрируема на E $\Leftrightarrow$ f интегрируема на E_1, E_2;
2) при условии $\mu\left(E_1 \cap E_2\right) = 0$ имеет место равенство

$$\int\limits_E f = \int\limits_{E_1} f + \int\limits_{E_2} f . \tag{2}$$

3⁰. Монотонность.
1) $f \geq 0$, интегрируема на E.
Тогда

$$\int\limits_E f \geq 0 . \tag{3}$$

2) $f \leq g$ интегрируемы на E.
Тогда

$$\int\limits_E f \leq \int\limits_E g . \tag{4}$$

Предложение $f \geq 0$, интегрируема, $\int\limits_E f = 0$. Тогда $f\left(x\right) = 0$ п.в.

Доказательство
Подберем параллелепипед $\Pi \supset E$. Покажем, что $f\chi_E = 0$ п.в. на Π.
Положим $A = \left\{x \in \Pi \mid f\chi_E\left(x\right) > 0\right\}$ и покажем, что A — множество меры нуль. Пусть $A_j = \left\{x \in \Pi \mid f\chi_E\left(x\right) > \dfrac{1}{j}\right\}$, тогда $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ и достаточно показать, что все A_j — множества меры нуль. Допустим противное, некоторое множество A_j не является множеством меры нуль, существует такое $\varepsilon > 0$,что для любого покрытия $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$ множества A_j справедливо неравенство $\mu\Delta_1 + \cdots + \mu\Delta_p \geq \varepsilon$.
Пусть $\tau = \left\{\Delta_1, \ldots, \Delta_m\right\}$ — разбиение прямоугольника Π. Можно считать, что с множеством A_j пересекаются первые p элементов разбиения. Эти элементы покрывают A_j, так что $\mu\Delta_1 + \cdots + \mu\Delta_p \geq \varepsilon$. Для верхней суммы Дарбу получаем неравенство

$$S_\tau=\sum_{i=1}^{m}M_i\mu\Delta_i\ge\sum_{i=1}^{p}M_i\mu\Delta_i\ge\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{p}\mu\Delta_i\ge\frac{\varepsilon}{j}$$

Мы приходим к выводу о том, что $\int\limits_E f\ge\frac{\varepsilon}{j}>0$, вопреки условию.

4^0. Оценки интеграла.

1) f интегрируема на измеримом множестве E.

$$\forall x\in E\ m\le f(x)\le M. \tag{5}$$

Тогда

$$m\mu E\le\int\limits_E f\le M\mu E \tag{6}$$

2) f интегрируема на измеримом множестве E.

Тогда

$$\left|\int\limits_E f\right|\le\int\limits_E|f| \tag{7}$$

3) f интегрируема на измеримом множестве E.

$$\forall x\in E\ |f(x)|\le M. \tag{8}$$

Тогда

$$\left|\int\limits_E f\right|\le M\mu E. \tag{9}$$

5^0. **Теорема о среднем.**

f непрерывна на измеримом линейно связном множестве E.

Тогда

$$\exists\xi\in E\ \ I=\int\limits_E f=f(\xi)\mu E.$$

Обобщенная теорема о среднем.

$g\ge0$, интегрируема.

Тогда

$$\exists\xi\in E\ \int\limits_E fg=f(\xi)\int\limits_E g.$$

§ 5. Сведение тройного интеграла к повторному

Теорема 1. f интегрируема на параллелепипеде Π, $I=\int\limits_\Pi f$.

Тогда

$$I=\int\limits_{a_x}^{b_x}dx\iint\limits_{[a_y,b_y]\times[a_z,b_z]}f(x,y,z)\,dydz, \tag{1}$$

$$I=\iint\limits_{[a_x,b_x]\times[a_y,b_y]}dxdy\int\limits_{a_z}^{b_z}f(x,y,z)\,dz. \tag{2}$$

Дополнение.

$$I=\int_{a_x}^{b_x}dx\int_{a_y}^{b_y}dy\int_{a_z}^{b_z}f\left(x,y,z\right)dz\ . \tag{3}$$

Теорема 2. Функция f интегрируема на измеримом множестве E.

1) Если

$$E=\left\{\left(x,y,z\right)|\left(x,y\right)\in D,\ \varphi\left(x,y\right)\le z\le\psi\left(x,y\right)\right\},$$

то

$$I=\iint_D dxdy\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}f\left(x,y,z\right)dz\ . \tag{4}$$

2) Если

$$E=\left\{\left(x,y,z\right)|\ a\le x\le b,\ \left(y,z\right)\in E_x\right\},$$

то

$$I=\int_a^b dx\iint_{E_x}f\left(x,y,z\right)dydz\ . \tag{5}$$

Примеры.

1) $I=\iiint\limits_{E:x,y,z\ge 0,\ x+y+z\le 1} z\,dxdydz$.

По формуле (4) получим

$$I=\iint\limits_{D:\,x,y\ge 0,\ x+y\le 1}dxdy\int_0^{1-x-y}zdz=\frac{1}{2}\iint_D\left(1-x-y\right)^2dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1dx\int_0^{1-x}\left(1-x-y\right)^2dy=\frac{1}{6}\int_0^1\left(1-x\right)^3dx=\frac{1}{24}\,.$$

Этот же интеграл вычислим с помощью формулы (5):

$$I=\int_0^1 zdz\iint\limits_{x,y\ge 0,\ x+y\le 1-z}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^1 z\left(1-z\right)^2dz=\frac{1}{24}\,.$$

2) $I=\iiint\limits_{E:\,x^2+y^2+z^2\le 1}z^2dxdydz=2\int_0^1 z^2dz\iint\limits_{x^2+y^2\le 1-z^2}dxdy=2\int_0^1\pi z^2\left(1-z^2\right)dz=2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4\pi}{15}$.

§ 6. Замена переменных в тройном интеграле

Теорема 1.

Пусть $\Phi:G'\to G$ — диффеоморфизм областей $G',\ G$, заданный соотношениями

$$\Phi:\begin{cases}x=\varphi\left(u,v,w\right),\\ y=\psi\left(u,v,w\right),\\ z=\chi\left(u,v,w\right),\end{cases}$$

$E\subset G,\ E'\subset G'$ — измеримые компакты, $E=\Phi\left(E'\right),\ E'=\Phi^{-1}\left(E\right)$, J — якобиан отображения Φ; f — интегрируемая на множестве E функция.

Тогда

$$\iiint_E f\left(x,y,z\right)dxdydz=\iiint_{E'}f\left(\varphi\left(u,v,w\right),\psi\left(u,v,w\right),\chi\left(u,v,w\right)\right)\left|J\left(u,v,w\right)\right|dudvdw\,. \tag{1}$$

Примеры.

1) $x=au,\ y=bv,\ z=cw;\ J=abc$.

$$\iiint\limits_{\substack{x,y,z\ge 0;\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\le 1}} (2x+3y+4z)\,dxdydz = \begin{bmatrix} x=2u,\\ y=3v,\\ z=4w \end{bmatrix} = 24 \iiint\limits_{\substack{u,v,w\ge 0;\\ u+v+w\le 1}} (4u+9v+16w)\,dudvdw =$$

$$= 24\cdot 29 \iiint\limits_{\substack{u,v,w\ge 0;\\ u+v+w\le 1}} wdudvdw = 24\cdot 29\cdot\frac{1}{24} = 29$$

2) Переход к цилиндрическим координатам.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{cases} \quad J = r\,.$$

$$I = \iiint\limits_{E:\,x^2+y^2+z^2\le 1} z^2 dxdydz = \frac{1}{2}\iiint\limits_{E}\left(x^2+y^2\right)dxdydz = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\substack{0\le r\le\sqrt{1-h^2},\\ 0\le\varphi\le 2\pi,\\ -1\le h\le 1}} r^3 drd\varphi dh =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dh \int\limits_0^{\sqrt{1-h^2}} r^3 dr = 2\pi\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^1\left(1-h^2\right)^2 dh = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{4\pi}{15}.$$

3) Переход к сферическим координатам.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\psi \\ y = \rho\sin\varphi\cos\psi \\ z = \rho\sin\psi \end{cases} \quad J = \rho^2\cos\psi \ \text{ или } \begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \quad |J| = \rho^2\sin\theta\,.$$

$$I = \iiint\limits_{E:\,x^2+y^2+z^2\le 1} z^2 dxdydz = \frac{1}{3}\iiint\limits_{E}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = \frac{1}{3}\iiint\limits_{\substack{0\le\rho\le 1,\\ 0\le\varphi\le 2\pi,\\ -\frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{\pi}{2}}} \rho^4\cos\psi\, d\rho d\varphi d\psi =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^4 d\rho = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{5} = \frac{4\pi}{15}.$$