

Лекция 2 09.09.2025 (3 часа)

§ 4. Важнейшие теоремы о равномерно сходящихся рядах

1°. Непрерывность

Теорема 1.

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность на промежутке Δ ; $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ на Δ .

Пусть далее x_0 — некоторая точка Δ и функции f_n непрерывны в точке x_0 .

Тогда f непрерывна в точке x_0 .

Доказательство.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Подберем такое n_0 , что

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при всех } x \in \Delta.$$

Получается, что при любом $x \in \Delta$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|$$

Поскольку f_{n_0} непрерывна в точке x_0 , то найдется такое $\delta > 0$, что

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и, следовательно, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Теорема 1'.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — функциональный ряд на промежутке Δ ; $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на Δ .

Пусть далее x_0 — некоторая точка Δ и функции f_n непрерывны в точке x_0 .

Тогда S непрерывна в точке x_0 .

Теорема 2. Теорема Дини.

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность на отрезке $[a, b]$;

- 1) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ на $[a, b]$ поточечно;
- 2) $\forall x \in [a, b]$ последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонна;
- 3) функции $f, f_1, f_2, \dots$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Тогда $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ на $[a, b]$.

Доказательство. Положим $\varphi_n = |f_n - f|$, тогда $\varphi_n \searrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

Ввиду монотонности последовательности φ_n , достаточно показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \forall x \in [a, b] \varphi_n(x) < \varepsilon.$$

Допустим противное, для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_n \in [a, b]$, для которой $\varphi_n(x_n) \geq \varepsilon$. Из последовательности $\{x_n\}$ извлечем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in [a, b]$.

По непрерывности функций φ_n при всех n справедливо соотношение

$$\varphi_n(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi_n(x_0)$$

При фиксированном n для достаточно больших k имеем

$$\varphi_n(x_{n_k}) \geq \varphi_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon.$$

Предельным переходом ($k \rightarrow \infty$) в неравенстве $\varphi_n(x_{n_k}) \geq \varepsilon$ получаем неравенство

$$\varphi_n(x_0) \geq \varepsilon,$$

противоречащее условию $\varphi_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Теорема 2'.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — функциональный ряд на отрезке $[a, b]$, состоящий из положительных, непрерывных функций.

$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ непрерывна на $[a, b]$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно на $[a, b]$.

2°. Предельный переход

Теорема 3.

Пусть функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве E к предельной функции f .

$$\forall n \quad f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_n(x_0) \text{ — предельная точка для множества } E).$$

Тогда последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится; предел $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ этой последовательности является и пределом для функции f ,

$$f(x) \xrightarrow[x \in E]{x \rightarrow x_0} A.$$

Иными словами, возможна перестановка предельных переходов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Доказательство.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Подберем такое N , что при $m, n > N$ справедливо неравенство

$$\forall x \in E \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Предельный переход при $x \rightarrow x_0$ дает неравенство

$$|A_n - A_m| \leq \varepsilon.$$

Последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится. Положим $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

Установим соотношение $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем такое n_0 , что $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех $x \in E$ и

$|A_{n_0} - A| < \frac{\varepsilon}{3}$. Поскольку $f_{n_0}(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_{n_0}$, то найдется такое $\delta > 0$, что $|f_{n_0}(x) - A_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех x , удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$.

Для таких x получаем неравенство

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - A_{n_0}| + |A_{n_0} - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

так что $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$.

Теорема 3'.

$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на множестве E ,

$$\forall n \quad f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_n.$$

Тогда числовой ряд $A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится, $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$.

Здесь оказалось возможным переставить операции суммирования и предельного перехода:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

3⁰. Дифференцирование

Теорема 4.

Пусть функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из дифференцируемых функций на промежутке Δ . Сама последовательность сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in \Delta$, а последовательность производных $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на промежутке Δ к некоторой функции φ .

Тогда последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на всем промежутке Δ (и даже равномерно, если Δ — конечный промежуток), предельная функция $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ дифференцируема и, наконец, $f' = \varphi$.

Последнее равенство можно записать в виде

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f \right)' = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f' \right)$$

Доказательство

Рассмотрим функциональную последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} : \psi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$.

(Последовательность рассматривается на $\Delta \setminus \{x_0\}$). Установим ее равномерную сходимость.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Опираясь на равномерную сходимость последовательности производных, мы можем найти такое N , что при всех $n, m > N$ и при всех $x \in \Delta$ выполняется неравенство

$$|f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon.$$

Применяя теорему Лагранжа к функции $f_n - f_m$, запишем разность

$$\psi_n(x) - \psi_m(x) = \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0}$$

в виде

$$\psi_n(x) - \psi_m(x) = f'_n(\xi) - f'_m(\xi).$$

Мы приходим к неравенству $|\psi_n(x) - \psi_m(x)| < \varepsilon$. По критерию Коши последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на $\Delta \setminus \{x_0\}$. Положим $\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$.

Во-первых, отсюда следует сходимость последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

Отметим равенство $\psi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Во-вторых, последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы о предельном переходе. Предельная функция ψ имеет при $x \rightarrow x_0$ предел, равный $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0) = \varphi(x_0)$, т.е. функция f имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Рассуждение можно повторить с заменой точки x_0 на произвольную точку промежутка Δ . Функция f имеет во всех точках промежутка Δ производную, $f' = \varphi$.

Теорема 4'.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — функциональный ряд из дифференцируемых на Δ функций, ряд $T = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$

равномерно сходится, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится в некоторой точке $x_0 \in \Delta$.

Тогда $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится,

$$S' = T,$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n.$$

4⁰. Интегрирование

Теорема 5.

Пусть функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из непрерывных функций и равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. $f_n \rightrightarrows f$
 $n \rightarrow \infty$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx ,$$

возможен предельный переход под знаком интеграла.

$$I_n = \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow I = \int_a^b f(x) dx ,$$

Доказательство.

Существование всех интегралов обеспечено непрерывностью рассматриваемых функций.

Положим $\rho_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$. По условию $\rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, и мы можем написать

$$|I_n - I| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \rho_n \cdot (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Теорема доказана.

Дополнение к теореме 5. Рассмотрим интегралы с переменным верхним пределом:

$$I_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad I(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Тогда $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$ на $[a, b]$.

Действительно,

$$|I_n(x) - I(x)| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \rho_n \cdot (x - a) \leq \rho_n \cdot (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Теорема 5'.

Пусть $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций на $[a, b]$.

Тогда ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx .$$

Замечание. Условия теорем 5, 5' можно ослабить, потребовать только интегрируемости функций. При этом следует доказать интегрируемость предельной функции (суммы ряда). Предельный переход обосновывается так же, как в доказанной теореме.

Вспомним достаточное условие интегрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \quad S_\tau - s_\tau < \varepsilon ,$$

$$S_\tau = \sum_{i=1}^p M_i \Delta x_i, \quad s_\tau = \sum_{i=1}^p m_i \Delta x_i$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Равномерная сходимость позволяет найти такое n_0 , что

$$\forall x \in [a, b] \quad |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} .$$

Поскольку функция f_{n_0} интегрируема, то

$$\exists \tau \quad S_\tau(f_{n_0}) - s_\tau(f_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Оценим еще разность между суммами Дарбу для функций f и f_{n_0} :

$$\begin{aligned}
M_i(f) &\leq M_i(f_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \\
S_\tau(f) &= \sum_{i=1}^p M_i(f) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^p \left(M_i(f_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right) \Delta x_i = \\
&= \sum_{i=1}^p M_i(f_{n_0}) \Delta x_i + \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \Delta x_i = S_\tau(f_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Аналогично и для нижних сумм Дарбу:

$$s_\tau(f) \geq s_\tau(f_{n_0}) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

В итоге

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \leq S_\tau(f_{n_0}) - s_\tau(f_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

функция f интегрируема.

Примеры. 1) $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, x \in [0, 1]$. Сходимость не является равномерной,

поскольку $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{2n}e^{-1/2}$. $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = -e^{-nx^2} \Big|_0^1 = 1 - e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0$. Предельный переход

под знаком интеграла оказался невозможным. Причина — отсутствие равномерной сходимости.

2) Отметим, что равномерная сходимость все же не является необходимым условием для

осуществимости предельного перехода. Так, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, x \in [0, 1]$, сходимость не

является равномерной, но $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2n} \ln(1+n^2x^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2n} \ln(1+n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.