§3. Γ-функция Эйлера

1⁰. Определение.

Рассмотрим бесконечное произведение Эйлера

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}{1+\frac{x}{n}} \text{ для } x\neq 0,-1,-2,\dots . \tag{1}$$

Поскольку

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}{1+\frac{x}{n}}\underset{n\to\infty}{=}\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\left(1+\frac{x(x-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right), \tag{2}$$

то произведение абсолютно сходится.

2⁰. Формула Эйлера-Гаусса

n-е частичное произведение равно

$$\frac{(n+1)^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^x\frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},$$

определение Γ-функции можно записать еще и в виде

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x n!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \tag{3}$$

3⁰. Формула понижения

Записав выражение для $\Gamma(x+1)$, мы видим, что

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ x}{n+x+1}=x,$$

$$x\,\Gamma(x)=\Gamma(x+1) \tag{4}$$

Заметим, что $\Gamma(1)=1$, а соотношение (4) дает

$$\Gamma(2)=\Gamma(1)\cdot 1=1,\ \Gamma(3)=\Gamma(2)\cdot 2=1\cdot 2,\ \Gamma(4)=\Gamma(3)\cdot 3=1\cdot 2\cdot 3 \text{ и т.д.}$$

Получаем замечательную формулу.

$$\Gamma(n+1)=n!,\ n=0,1,2,\ldots \tag{5}$$

Γ-функция — продолжение факториала на множество вещественных чисел без нуля и целых отрицательных.

§4. Разложение синуса в бесконечное произведение

Запишем формулу Муавра

$$(\cos z+i\sin z)^{2n+1}=\cos(2n+1)z+i\sin(2n+1)z\,. \tag{1}$$

По биномиальной формуле Ньютона

$$(\cos z+i\sin z)^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}i^{k}\cos^{2n+1-k}z\sin^{k}z\,. \tag{2}$$

Приравняем мнимые части:

$$\sin(2n+1)z=\sum_{j=0}^{n}C_{2n+1}^{2j+1}(-1)^{j}\cos^{2n-2j}z\sin^{2j+1}z=\sin zP_n\left(\sin^2 z\right), \tag{3}$$

где P_n — многочлен степени n.

Левая часть этого равенства принимает нулевые значения в точках

$$z_k=\frac{\pi k}{2n+1},\ k=1,\ldots,n\,.$$

Положим $u_k=\sin^2\dfrac{\pi k}{2n+1}$. Видим, что $P_n(u_k)=0$, $u_1,u_2,\ldots,u_n$ — попарно различные корни многочлена P_n степени n. Поэтому

$$P_n(u)=A\left(1-\frac{u}{u_1}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{u_n}\right), \tag{4}$$

$$\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}=A\left(1-\frac{\sin^2 z}{u_1}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 z}{u_n}\right) \tag{5}$$

Переходя к пределу $(z\to 0)$, получаем значение $A=2n+1$.

Итак,

$$\sin(2n+1)z=(2n+1)\sin z\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2 z}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right). \tag{6}$$

Заменим здесь $(2n+1)z$ на x:

$$\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right) \tag{7}$$

Будем считать x отличным от $0,\pm\pi,\pm2\pi,\dots$, так что $\sin x\neq 0$. Выберем k, для которого $(k+1)\pi>|x|$, и пусть $n>k$. Представим теперь $\sin x$ произведением

$$\sin x=U_k^n\cdot V_k^n, \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered}U_k^n=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 k\frac{\pi}{2n+1}}\right),\\ V_k^n=\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2(k+1)\frac{\pi}{2n+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2 n\frac{\pi}{2n+1}}\right)\end{gathered} \tag{9}$$

При фиксированном k легко вычисляется

$$U_k=\lim_{n\to\infty}U_k^n=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \tag{10}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}=x,\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2n+1}}{\sin^2\frac{\pi j}{2n+1}}=\frac{x^2}{\pi^2 j^2}\right)$$

Из равенства (8) следует, что существует

$$V_k=\lim_{n\to\infty}V_k^n$$

и

$$\sin x = U_k \cdot V_k\,. \tag{11}$$

Займемся оценкой V_k.

Известно, что для $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ имеют место неравенства

$$\frac{2}{\pi}\varphi < \sin\varphi < \varphi\,.$$

Поэтому

$$\sin^2 \frac{x}{2n+1} < \frac{x^2}{(2n+1)^2} \tag{13}$$

и

$$\sin^2 j\frac{\pi}{2n+1} > \frac{4}{\pi^2}\frac{j^2\pi^2}{(2n+1)^2} = \frac{4j^2}{(2n+1)^2}\,, \tag{14}$$

так что

$$1 > V_k^n > \prod_{j=k+1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{4j^2}\right). \qquad (15$$

Бесконечное произведение

$$\prod_{j=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4j^2}\right) \tag{16}$$

сходится, поскольку сходится ряд

$$\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{x^2}{4j^2}\,.$$

Предельный переход дает неравенство

$$1 > V_k > \prod_{j=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{4j^2}\right). \tag{17}$$

В последнем неравенстве справа мы видим остаточное произведение сходящегося произведения (16). Следовательно,

$$V_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

и из представления (11) мы получаем замечательное разложение

$$\sin x = x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots, \tag{18}$$

впервые установленной Эйлером.

В этом равенстве можно допустить для x и ранее исключенные значения $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$.

Если в полученном разложении взять $x=\frac{\pi}{2}$, мы получим равенство

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right), \tag{19}$$

связанное с формулой Валлиса.

Из (18) можно получить и разложение косинуса:

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x} = \frac{2x\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{n^2\pi^2}\right)}{2x\cdot\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)}$$

$$\cos x = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)^2}\right) \tag{20}$$

Упражнение. Получите разложение косинуса из разложения синуса и формулы $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

§5. Формула дополнения для Γ-функции

Вспомним определение Γ-функции:

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)} \qquad (1)$$

С учетом соотношения $\Gamma(x)\cdot x=\Gamma(x+1)$ можем написать

$$\Gamma(1-x)=-x\cdot\Gamma(-x)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}}{\left(1-\frac{x}{n}\right)} \qquad (2)$$

Перемножая (20), (21), получаем равенство

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)}=\frac{1}{x\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)},$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}, \qquad (3)$$

называемое формулой дополнения. Эта формула имеет место для всех нецелых значений x.

Полагая в (22) $x=\frac{1}{2}$, найдем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,. \qquad (4)$$