

Глава II БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

§1. Основные понятия

1⁰. Определение. Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность. Запись

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 p_3 \cdots \quad (1)$$

называется *бесконечным произведением*.

С бесконечным произведением свяжем последовательность

$$\{P_n\}_{n=1}^{\infty} : P_n = \prod_{k=1}^n p_k = p_1 p_2 \cdots p_n$$

частичных произведений. Можно сказать, что бесконечное произведение — это пара последовательностей: *последовательности членов* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и *последовательности частичных произведений* $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Предел $P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ (конечный или бесконечный) последовательности частичных произведений называют *значением бесконечного произведения* (1), при этом пишут

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 p_3 \cdots$$

Если бесконечное произведение имеет конечное **ненулевое** значение, то оно называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Замечание. Если хотя бы один из сомножителей равен нулю, то нулевым будет и все произведение. Исключим сейчас этот случай из рассмотрения, считаем $p_n \neq 0, n = 1, 2, \dots$.

2⁰. Примеры. 1) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

Действительно,

$$\begin{aligned}
 P_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

2) Формула Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}$$

может теперь быть записана в виде бесконечного произведения

$$\frac{\pi}{4} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2} \right).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 P_n &= \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{(2k)(2k+2)}{(2k+1)^2} = \frac{(2n)!!(2n+2)!!}{2((2n+1)!!)^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1} \frac{2n+2}{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Упражнение: $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2} \right) = \frac{2}{\pi}.$

§2. Свойства сходящихся произведений.

1°. Теорема 1 Необходимое условие сходимости

Если бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 p_3 \cdots \quad (1)$$

сходится то

$$p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (2)$$

Действительно, $p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{P}{P} = 1$ (если произведение сходится, то $P \neq 0$ и $p_n \neq 0$,

начиная с некоторого номера, так что деление корректно).

2°. Теорема 2. Свойства остаточного произведения

1) Если бесконечное произведение (1) сходится, то сходятся все остаточные произведения

$$\pi_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} p_k = p_{n+1} p_{n+2} \cdots, \quad (3)$$

при этом $P = P_n \cdot \pi_n$, т. е.

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = \prod_{k=1}^n p_k \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty} p_k. \quad (4)$$

2) Если сходится хотя бы одно остаточное произведение, то сходится произведение (1).

3) В случае сходимости

$$\pi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (5)$$

3°. Действия над бесконечными произведениями

Упражнение. Если бесконечные произведения $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ сходятся, то сходятся и произведения $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ и $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$, при этом

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \prod_{n=1}^{\infty} q_n, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} p_n}{\prod_{n=1}^{\infty} q_n}.$$

4°. Связь с рядами

В случае сходимости все p_n , начиная с некоторого номера, положительны. Будем считать, что все $p_n > 0$.

Теорема 3. Для сходимости бесконечного произведения (1) необходима и достаточна сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n . \quad (6)$$

В случае сходимости сумма S этого ряда и значение P бесконечного произведения (1) связаны равенством

$$P = e^S \quad (7)$$

◀ Заметим, что частичное произведение P_n и частичная сумма S_n ряда (5) связаны соотношением

$$P_n = e^{S_n} ,$$

предельный переход в котором (с учетом непрерывности показательной и логарифмической функций) дает доказательство теоремы. ▶

При исследовании бесконечного произведения (1) удобно записать его члены в виде

$$p_n = 1 + a_n , \quad (8)$$

а само произведение — в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \quad (9)$$

Теорема 4. Если $a_n > 0$, начиная с некоторого номера, то сходимость произведения (9) равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n . \quad (10)$$

◀ Как для сходимости произведения (9), так и для сходимости ряда (10) необходимо условие

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 . \quad (11)$$

Поэтому считаем условие (11) выполненным.

В этой ситуации $\ln(1 + a_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a_n$, по теореме сравнения сходимость ряда (10) равносильна сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$, которая по теореме 3 равносильна сходимости бесконечного произведения (9). ▶

Откажемся от условия $a_n > 0$.

Теорема 5. Если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad (12)$$

то сходится бесконечное произведение (9).

◀ Из условия (12) следует условие (11). По формуле Тейлора для логарифма получаем:

$$\ln(1+a_n) = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2), \quad \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \quad (13)$$

По теореме сравнения получаем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \ln(1+a_n)). \quad (14)$$

Теперь ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ оказывается сходящимся, как разность сходящихся рядов (10) и (14). По теореме 3 бесконечное произведение (9) сходится.

Определение. Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ называется абсолютно сходящимся, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится.

5°. Примеры. 1) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^\lambda}\right)$, $\lambda > 0$ сходится, если $\lambda > 1$, и расходится, если $\lambda \leq 1$.

Действительно, по теореме 4 сходимость рассматриваемого произведения равносильна сходимости обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$.

$$2) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\lambda}\right), \quad \lambda > 0$$

сходится абсолютно, если $\lambda > 1$. Если $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ произведение расходится к нулю.

Если $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$ произведение сходится неабсолютно.