Лекции 28 – 30.   *06 – 13.12.2024*

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава I. Неопределенный интеграл

§ 1 Понятие первообразной и неопределенного интеграла

1^0. Первообразная

Определение. Пусть f — функция, определенная на промежутке Δ. Функция F, дифференцируемая на Δ, называется первообразной для f, если $F' = f$ $\left(\forall x \in \Delta \ F'(x) = f(x)\right)$.

Пример. Функция $f : f(x) = x^2$ имеет функцию $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ в качестве первообразной.

2^0. Теорема о строении множества первообразных

Теорема.
Пусть f — функция на промежутке Δ.
1) Если F — первообразная для f на Δ, то для любого вещественного числа C функция $\Phi = F + C$ $\left(\forall x \in \Delta \ \Phi(x) = F(x) + C\right)$ тоже является первообразной для f.
2) Если Φ — первообразная для f на Δ, то существует вещественное число C, такое что $\Phi = F + C$.
Иными словами, если F — первообразная для f на Δ, то формула $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная, дает общий вид первообразной для f на Δ.
Доказательство.
1) Если F — первообразная для f на Δ, а $\Phi = F + C$, то $\Phi'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$, Φ — первообразная для f на Δ.
2) Пусть Φ — первообразная для f на Δ, $H = \Phi - F$. Тогда $H' = \Phi' - F' = f - f = 0$, по условию постоянства $H = const$, найдется такое вещественное число C, что $H = C$, $\Phi = F + C$.

3^0. Неопределенный интеграл

Совокупность $\int f(x)\,dx$ всевозможных первообразных для функции f называется неопределенным интегралом этой функции. Здесь $\int$ — символ интеграла, f — подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ — подынтегральное выражение.
Если F — одна из первообразных, то можно написать

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

4^0. Теорема о существовании первообразной

Теорема. Непрерывная функция имеет первообразную. Если f — непрерывная на промежутке Δ функция, то существует такая дифференцируемая на промежутке Δ функция F, что $F' = f$, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

§ 2 Простейшие свойства неопределенного интеграла

1^0. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$, $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

2^0. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$, $\int dF(x) = F(x) + C$.

3^0. $\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

4^0. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$, $a \neq 0$

5^0. $\int g(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}\int g(t)\,dt\Big|_{t=ax+b}$

§ 3 Таблица интегралов

1^0. $\int 0\,dx = C$, $\int dx = x + C$, $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\int x^\mu dx = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$

2^0. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3^0. $\int e^x dx = e^x + C$, $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

4^0. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

5^0. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

6^0. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$, $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$

7^0. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$, $a > 0$

8^0. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a > 0$

9^0. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$, $a > 0$

10^0. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$, $a > 0$,

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$, $a > 0$

§ 4 Замена переменной в неопределенном интеграле

Пусть g — непрерывная функция на промежутке $\tilde{\Delta}$, G — ее первообразная. Пусть далее φ — дифференцируемая функция на Δ, $\varphi(\Delta) \subset \tilde{\Delta}$. Рассмотрим функцию

$$F = G \circ \varphi:\ F(x) = G(\varphi(x)).$$

Вычислим производную

$$F'(x) = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x).$$

F — первообразная для функции f: $f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x)$.

В терминах неопределенных интегралов получается формула

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int g(t)\,dt\Big|_{t=\varphi(x)} \quad — \qquad (1)$$

формула замены переменной в неопределенном интеграле.

Примеры

1) $\int g(ax+b)\,dx,\ t = ax+b$,

2) $\int g(x^2)\,x\,dx,\ t = x^2$

3) $\int g(\sin x)\cos x\,dx,\ t = \sin x$

$\int g(\cos x)\sin x\,dx,\ t = \cos x$

Формулу (1) можно прочитать "справа налево". Мы предположим, что функция φ имеет обратную. Мы получаем формулу

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \qquad (2)$$

Примеры

1)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[x = \sin t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right] = \int \cos^2 t\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\int(\cos 2t + 1)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + t\right) + C = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$$

2)

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^2} = \left[x = a\,\mathrm{tg}\,t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2a^3}\left(\frac{1}{2}\sin 2t + t\right) + C$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left(\frac{\frac{x}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}} + \mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\right) + C = \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$

3) На промежутке $(1, +\infty)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = [x = \mathrm{ch}\,t,\ t > 0] = \int dt = t + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$$

§ 5 Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Примеры

1^0. $\int x\cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right] = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$

2^0. Интегрирование по частям можно выполнять несколько раз.
$\int x^2 e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - 2\int x e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$.

3^0. В следующем примере двукратное интегрирование по частям дает уравнение для интеграла $\int e^x \cos x dx$:

$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$;

$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$.

4^0. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{arctg} x\, d(x^2+1) = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C$.

5^0. $\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$.

§ 6 Многочлены и рациональные функции

1^0. Выражение $P(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1}z + c_n$, где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ — комплексные числа, называется комплексным многочленом. Числа $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ называются коэффициентами многочлена $P(z)$. Если $c_0 \neq 0$, число n называется степенью многочлена $n = \deg(P(z))$.

Степенью нулевого многочлена считается $(-\infty)$.

Выражение $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — вещественные числа, называется вещественным многочленом.

2^0. С многочленом $P(z)$ связана функция $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, действующая по формуле $P(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1}z + c_n$, для $z \in \mathbb{C}$. Аналогичным образом с вещественным многочленом связывается вещественная функция.

Равенство многочленов означает равенство их коэффициентов. Можно показать, что многочлены окажутся равными в том и только в том случае, если равны соответствующие функции.

3^0. В множестве многочленов вводятся операции сложения и умножения в соответствии с операциями над функциями.

Вводится операция деления с остатком. Если $P(z)$, $Q(z)$ — многочлены, $Q(z) \neq 0$, то существуют и единственны многочлены $P_1(z)$, $P_2(z)$, такие что

$$P(z)=P_1(z)Q(z)+P_2(z),$$
$$\deg(P_2(z))<\deg(Q(z)).$$

Многочлен $P_1(z)$ называется частным, а $P_2(z)$ — остатком от деления $P(z)$ на $Q(z)$. Если при делении с остатком $P(z)$ на $Q(z)$ получается нулевой остаток, говорят, что $P(z)$ делится на $Q(z)$. Иными словами, $P(z)$ делится на $Q(z)$, если существует многочлен $P_1(z)$, такой что $P(z)=P_1(z)Q(z)$

4^0. Число z_0 называется корнем многочлена $P(z)$, если $P(z_0)=0$. z_0 — корень многочлена $P(z)$ в том и только в том случае, если $P(z)$ делится на $z-z_0$, т.е. если существует многочлен $P_1(z)$, такой что $P(z)=(z-z_0)P_1(z)$.

5^0. Пусть z_0 — корень многочлена $P(z)$. Подберем наибольшее натуральное k, для которого $P(z)$ делится на $(z-z_0)^k$, т.е. существует многочлен $P_1(z)$, такой что $P(z)=(z-z_0)^k P_1(z)$. Это число k называется кратностью корня z_0.

z_0 — корень кратности k для многочлена $P(z)$ в том и только в том случае, если выполнено одно из следующих условий

$$P(z)=(z-z_0)^k P_1(z),\ P_1(z_0)\neq 0;$$
$$P(z_0)=P'(z_0)=\cdots=P^{(k-1)}(z_0)=0,\ P^{(k)}(z_0)\neq 0.$$

6^0**. Основная теорема высшей алгебры.** Всякий комплексный многочлен степени $n\geq 1$ имеет хотя бы один комплексный корень.

7^0. Пусть $P(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ — многочлен степени $n\geq 1$, $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_r$ — его корни кратностей $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r$. Тогда

$$P(z)=c_0(z-z_1)^{k_1}\cdots(z-z_r)^{k_r}.$$

Комплексный многочлен единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) разлагается на линейные множители.

8^0. В вещественном случае квадратный трехчлен может оказаться неразложимым. Квадратный трехчлен x^2+px+q неразложим над полем вещественных чисел, если имеет отрицательный дискриминант, если $\frac{p^2}{4}-q<0$. Рассматривая этот квадратный трехчлен с комплексной точки зрения, мы найдем невещественные взаимно сопряженные корни $z_{1,2}=\alpha\pm i\beta=-\frac{p}{2}\pm i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

Если многочлен P с вещественными коэффициентами имеет невещественный корень $z_0=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ кратности k, то комплексно сопряженное число $\overline{z}_0=\alpha-i\beta$ — тоже корень для P, причем той же кратности k.

9^0. Пусть $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ — вещественный многочлен степени $n\geq 1$, $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r$ — его вещественные корни кратностей $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r$,

$z_1 = \alpha_1 \pm i\beta_1,\ z_2 = \alpha_2 \pm i\beta_2,\ \dots,\ z_s = \alpha_s \pm i\beta_s$ — невещественные корни кратностей $m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_s$. Тогда

$$P(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_r)^{k_r} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{m_1} \cdots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{m_s} .$$

Здесь $x^2 + p_j x + q_j = \left(x - \alpha_j - i\beta_j\right)\left(x - \alpha_j + i\beta_j\right),\ j = 1, \dots s$.

10^0. Пусть $P(z),\ Q(z)$ — многочлены, $Q(z) \neq 0$. Дробь $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ называется рациональной функцией, или рациональной дробью. Соответствующая функция R определяется на множестве всех комплексных чисел, для которых знаменатель не обращается в нуль.

11^0. Рациональная дробь $R(z)$ называется правильной, если $\deg\left(P(z)\right) < \deg\left(Q(z)\right)$. Если дробь не является правильной, разделим числитель на знаменатель с остатком:

$$P = P_1 Q + P_2,\ \deg(P_2) < \deg(Q).$$

Неправильная дробь оказывается представленной в виде суммы многочлена и правильной дроби:

$$R = P_1 + \frac{P_2}{Q}.$$

12^0. Дробь $\dfrac{A}{(z - z_0)^k}$ называется простейшей над полем комплексных чисел. Всякую правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей.

Если $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ — правильная дробь, а для знаменателя имеет место разложение

$$Q(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdots (z - z_r)^{k_r},\ k_1 + \dots + k_r = n, \tag{*}$$

то дробь $R(z)$ единственным образом представляется в виде

$$\begin{aligned} R(z) = \frac{A_{11}}{z - z_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(z - z_1)^{k_1}} &+ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ + \frac{A_{r1}}{z - z_r} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(z - z_r)^{k_r}} & \end{aligned} \tag{1}$$

13^0. Дроби $\dfrac{A}{(x - x_0)^k}$ и $\dfrac{Mx + N}{\left(x^2 + px + q\right)^m},\ \dfrac{p^2}{4} - q < 0,$ называются простейшими над полем вещественных чисел. Всякую правильную вещественную дробь можно представить в виде суммы простейших вещественных дробей.

Если $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь, а для знаменателя имеет место разложение

$$Q(z) = (x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_r)^{k_r} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{m_1} \cdots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{m_s} \tag{**}$$

то дробь $R(x)$ единственным образом представляется в виде

$$
\begin{aligned}
R(x) = \frac{A_{11}}{x-x_1} + \cdots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ \frac{A_{r1}}{x-z_r} + \cdots + \frac{A_{rk_r}}{(x-z_r)^{k_r}} + \\
+ \frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \cdots + \frac{M_{1m_1}x+N_{1m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ \frac{M_{s1}x+N_{s1}}{x^2+p_sx+q_s} + \cdots + \frac{M_{sm_s}x+N_{sm_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}}, \\
k_1+\cdots+k_r+2(m_1+\cdots+m_s)=n.
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

14^0. Для отыскания неизвестных коэффициентов можно умножить равенство (2) на знаменатель и приравнять в полученном равенстве многочленов соответствующие коэффициенты. Получится система линейных уравнений, из которой коэффициенты можно найти.

Пример.

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

$$1 = A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$$

$$x^2 \mid A+B=0,$$

$$x \mid -A+B+C=0,$$

$$x^0 \mid A+C=1.$$

$$A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3},$$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right).$$

Если $Q(z)=(x-x_1)\cdots(x-x_r)$, удобным оказывается метод частных значений. Полагая в равенстве многочленов последовательно $x=x_j,\ j=1,\ldots,r$, мы найдем все коэффициенты.

Пример.

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

$$x = A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2),$$

$$x=1:1=2A,\ A=\frac{1}{2};$$

$$x=2:2=-B,\ B=-2;$$

$$x=3:3=2C,\ C=\frac{3}{2};$$

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{2}{x-2}+\frac{3}{2(x-3)}.$$

§ 7 Интегрирование рациональных функций

1^0. План работы.

Пусть требуется построить первообразную для рациональной дроби

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

1) Выделим целую часть дроби, представим ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.
2) Правильную дробь представим в виде суммы простейших дробей.
3) Проинтегрируем простейшие дроби.

2^0. Интегрирование простейших дробей.

1) $\int\frac{A}{x-x_0}dx=\ln|x-x_0|+C$,

2) $\int\frac{A}{(x-x_0)^k}dx=-\frac{A}{(k-1)(x-x_0)^{k-1}}+C,\ k=2,3,\cdots,$

3) $\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx,\ \frac{p^2}{4}-q<0$.

Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},$$

введем новую переменную интегрирования $t=x+\frac{p}{2}$ и обозначение $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Интеграл сводится к

$$\int\frac{tdt}{t^2+a^2}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+a^2\right)+C \text{ и } \int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Запишем вычисление полностью:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{M\left(x+\frac{p}{2}\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

Пример.

$$\int\frac{4x+7}{x^2+2x+6}dx==\int\frac{4(x+1)+3}{(x+1)^2+4}dx=2\ln\left(x^2+2x+6\right)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

4) $\int\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx,\ \frac{p^2}{4}-q<0$.

Опять выделяя полный квадрат, вводя переменную $t = x + \frac{p}{2}$ и обозначение $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, сведем интеграл к

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^m} = -\frac{1}{2(m-1)}\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}} + C \text{ и } I_m = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}.$$

Для последнего интеграла с помощью интегрирования по частям получим рекуррентную формулу.

$$I_{m+1} = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^{m+1}}dt = \frac{1}{a^2}\left(I_m + \frac{1}{2m}\int td\,\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^m}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(I_m + \frac{1}{2m}\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m} - \frac{1}{2m}I_m\right) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2m}\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^m} + \frac{2m-1}{2m}I_m\right).$$

Поскольку

$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$, то

$I_2 = \frac{1}{2a^2}\frac{t}{t^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$,

$I_3 = \frac{1}{4a^2}\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{t}{t^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C$.

Пример. $I = \int \frac{xdx}{\left(x^2+2x+3\right)^2} = \left[t = x+1\right] = \int \frac{t-1}{\left(t^2+2\right)^2}dt$,

$$\int \frac{tdt}{\left(t^2+2\right)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+2} + C,$$

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2+2} - \int \frac{t^2dt}{\left(t^2+2\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2+2} + \frac{1}{2}\int td\,\frac{1}{t^2+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dt}{t^2+2} + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+a^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+2}\right) =$$

$$= \frac{t}{4\left(t^2+2\right)} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{t}{4\left(t^2+2\right)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C,$$

$$I = -\frac{t+2}{4\left(t^2+2\right)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\frac{x+3}{4\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

§ 7 Интегрирование иррациональных выражений

1⁰. Интеграл $I=\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ **рационализируется подстановкой** $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ **.**

Действительно, $x=\dfrac{dt^n-b}{a-ct^n}=h(t)$, интеграл I сводится к $\int R\big(h(t),t\big)h'(t)\,dt$, к интегралу от рациональной функции.

Примеры. 1) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+2}}=\left[t=\sqrt{x+2},\ x=t^2-2\right]=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=$

$=2\big(t-\ln(1+t)\big)+C=2\left(\sqrt{x+2}-\ln\left(1+\sqrt{x+2}\right)\right)+C$.

2) $\displaystyle I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{x+1}$,

$\displaystyle t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}},\ x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\ dx=-\frac{6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}$,

$$I=-\int\frac{6t^3\left(t^3-1\right)}{\left(t^3-1\right)^2 2t^3}dt=-3\int\frac{dt}{t^3-1}=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C,\ t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

2⁰. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Вопрос интегрирования здесь может быть решен подстановками Эйлера. За подробностями можете обратиться к курсу А.П.Аксенова.

Если $a>0$, положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\,x$,

если $c>0$, положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$,

если квадратный трехчлен имеет различные вещественные корни $x_1,\ x_2$, положим $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-x_1\right)$.

Проиллюстрируем применение первой подстановки интегралом $\displaystyle\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$. Положим $\sqrt{x^2-x+1}=t-x$. Тогда $x^2-x+1=t^2-2tx+x^2,\ x=\dfrac{t^2-1}{2t-1}$ и

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{2t^2-2t+2}{t(2t-1)^2}dt=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{2t-1}+\frac{3}{(2t-1)^2}\right)dt=$$

$$=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t-1|-\frac{3}{2}\frac{1}{2t-1}+C,\ t=x+\sqrt{x^2-x+1}$$

Сейчас мы рассмотрим другие приемы.

I $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.(*)

Пусть $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Искомый многочлен Q_{n-1} запишем с неопределенными коэффициентами:

$$Q_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$$

Продифференцируем равенство (*) и умножим результат на $\sqrt{ax^2+bx+c}$:

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + Q_{n-1}(x)\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)\left(ax^2+bx+c\right) + Q_{n-1}(x)\left(ax+\frac{b}{2}\right) + \lambda$$

$$P_n(x) = \left(b_0(n-1)x^{n-2} + b_1(n-2)x^{n-3} + \cdots + b_{n-2}\right)\left(ax^2+bx+c\right) + \left(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}\right)\left(ax+\frac{b}{2}\right) + \lambda$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему линейных уравнений

$$nab_0 = a_0$$

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)bb_0 + (n-1)ab_1 = a_1$$

$$(n-1)cb_0 + \left(n-\frac{3}{2}\right)bb_1 + (n-2)ab_2 = a_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3cb_{n-4} + \frac{5}{2}bb_{n-3} + 2ab_{n-2} = a_{n-2}$$

$$2cb_{n-3} + \frac{3}{2}bb_{n-2} + ab_{n-1} = a_{n-1}$$

$$cb_{n-2} + \frac{1}{2}bb_{n-1} + \lambda = a_{n-1}$$

Получилась система с треугольной матрицей. Из первого уравнения мы находим b_0, после этого второе уравнение дает нам b_1 и т.д.

Пример

$$\int\sqrt{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + C$$

II $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $t = \frac{1}{x-\alpha}$.

Подстановка сводит интеграл II к типу I. Действительно,

$x-\alpha = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $ax^2+bx+c = \frac{\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)t^2 + (2a\alpha+b)t + a}{t^2}$, интеграл превращается в

$$-\int \frac{t^{k-1}}{\sqrt{\left(a\alpha^2+b\alpha+c\right)t^2+\left(2a\alpha+b\right)t+a}}dt$$

(для определенности $t>0$). Если коэффициент при t^2 нулевой получаем интеграл с дробно-линейной иррациональностью, в других случаях интеграл типа I.

Пример

$$\int \frac{dx}{\left(x-1\right)^2\sqrt{x^2-x+1}}=-\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\frac{x+1+2\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}+C$$

III $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\ \frac{b^2}{4}-q<0$.

Рассмотрим сначала случай, где трехчлен ax^2+bx+c лишь множителем отличается от x^2+px+q , интеграл имеет вид

$$\int \frac{Mx+N}{\left(ax^2+bx+c\right)^{\frac{2m+1}{2}}}dx$$

Интеграл легко представляется линейной комбинацией интегралов

$\int \frac{ax+\frac{b}{2}}{\left(ax^2+bx+c\right)^{\frac{2m+1}{2}}}dx$ (берется подстановкой $t=\sqrt{ax^2+bx+c}$) и $\int \frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^{\frac{2m+1}{2}}}dx$.

Для последнего интеграла рекомендуется подстановка Абеля

$$s=\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'=\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ .$$

Проведем вычисления.

$$s^2=\frac{a^2x^2+abx+\frac{b^2}{4}}{ax^2+bx+c},\ a-s^2=\frac{ac-\frac{b^2}{4}}{ax^2+bx+c};$$

$$s\sqrt{ax^2+bx+c}=ax+\frac{b}{2},\sqrt{ax^2+bx+c}ds+s^2dx=adx,\ \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{ds}{a-s^2}$$

Получается интеграл

$$\frac{1}{\left(ac-\frac{b^2}{4}\right)^m}\int\left(a-s^2\right)^{m-1}ds\ .$$

Задача сведена к интегрированию многочлена.

В общем случае для симметрии положим $ax^2+bx+c=a(x^2+p_1x+q_1)$.

Поставим задачу проведения такой замены переменной, при которой сразу в двух трехчленах ликвидируются члены первой степени. Если $p=p_1$, задача решается линейной заменой

$u=x+\frac{p}{2}$.

Пусть теперь $p \neq p_1$. Можно считать, что первый трехчлен имеет вид x^2+1. Выполним замену $x=\dfrac{\mu u+\nu}{u+1}$

$$x^2+1=\frac{\left(\mu^2+1\right)u^2+2\left(\mu\nu+1\right)u+\left(\nu^2+1\right)}{\left(u+1\right)^2};$$

$$x^2+p_1x+q_1=\frac{\left(\mu^2+p_1\mu+q_1\right)u^2+2\left(\mu\nu+p_1\dfrac{\mu+\nu}{2}+q_1\right)u+\left(\nu^2+p_1\nu+q_1\right)}{\left(u+1\right)^2}$$

Искомые коэффициенты определяются из условий

$$\mu\nu=-1,\ \mu\nu+p_1\frac{\mu+\nu}{2}+q_1=0\ \text{, т.е.}$$

$$\mu\nu=-1,\ p_1\frac{\mu+\nu}{2}=1-q_1,\ \mu+\nu=2\frac{1-q_1}{p_1}.$$

$\mu,\ \nu$ должны быть корнями квадратного уравнения $z^2-2\dfrac{1-q_1}{p_1}z-1=0$. Уравнение имеет положительный дискриминант.

Выполнив подстановку, мы получим интеграл

$$\int\frac{P(u)}{\left(u^2+\lambda\right)^m\sqrt{\alpha u^2+\beta}}du.$$

Представляем дробь $\dfrac{P(u)}{\left(u^2+\lambda\right)^m}$ суммой простейших, приходим к интегралам

$$\int\frac{u}{\left(u^2+\lambda\right)^k\sqrt{\alpha x^2+\beta}}du,\ \int\frac{1}{\left(u^2+\lambda\right)^k\sqrt{\alpha u^2+\beta}}du$$

Первый берется подстановкой $t=\sqrt{\alpha u^2+\beta}$, второй — подстановкой Абеля

$$s=\left(\sqrt{\alpha u^2+\beta}\right)'=\frac{\alpha u}{\sqrt{\alpha u^2+\beta}}.$$

Пример

$$\int\frac{x+3}{\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}dx.$$

Полагаем $x=\dfrac{\mu u+\nu}{u+1}$.

$$x^2-x+1=\frac{\left(\mu^2-\mu+1\right)u^2+2\left(\mu\nu-\dfrac{\mu+\nu}{2}+1\right)u+\left(\nu^2-\nu+1\right)}{\left(u+1\right)^2},$$

Тогда

$$x^2+x+1=\frac{\left(\mu^2+\mu+1\right)u^2+2\left(\mu\nu+\dfrac{\mu+\nu}{2}+1\right)u+\left(\nu^2+\nu+1\right)}{\left(u+1\right)^2}$$

Следует добиться равенств $\mu\nu = -1,\ \mu + \nu = 0$. Можно взять $\mu = 1,\ \nu = -1$.

Тогда $x = \dfrac{u-1}{u+1},\ x^2 - x + 1 = \dfrac{u^2+3}{(u+1)^2},\ x^2 + x + 1 = \dfrac{3u^2+1}{(u+1)^2},\ x + 3 = \dfrac{4u+2}{u+1}$.

Считая $u + 1 > 0$, получаем интеграл

$$\int \frac{8u+4}{(u^2+3)\sqrt{3u^2+1}}\,du .$$

$$\int \frac{u}{(u^2+3)\sqrt{3u^2+1}}\,du = \left[t = \sqrt{3u^2+1},\ dt = \frac{3udu}{\sqrt{3u^2+1}} \right] = \frac{3}{3}\int \frac{dt}{t^2+8} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{2\sqrt{2}} + C ,$$

$$\int \frac{1}{(u^2+3)\sqrt{3u^2+1}}\,du = \left[\begin{array}{l} s = \dfrac{3u}{\sqrt{3u^2+1}},\ s^2 = \dfrac{9u^2}{3u^2+1},\ 3 - s^2 = \dfrac{3}{3u^2+1}, 3u^2 = \dfrac{s^2}{3-s^2} \\ s\sqrt{3u^2+1} = 3u, \sqrt{3u^2+1}ds + s^2 du = 3du,\ \dfrac{ds}{3-u^2} = \dfrac{du}{\sqrt{3u^2+1}} \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{3}{27-8s^2}ds = \frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}s}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}s} + C$$

Ответ $2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{2}(1-x)} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\ln\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2}(1+x)}{\sqrt{3}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2}(1+x)}$

3⁰. Интегрирование дифференциальных биномов.

$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$, где $m,\ n,\ p$ — рациональные числа.

1) p — целое. Интеграл относится к типу, рассмотренному в 1⁰. Рационализация достигается подстановкой $x = z^N$, где N — н.о.к. (наименьшее общее кратное) знаменателей дробей $m,\ n$.

В противном случае полагаем $z = x^n$ и приходим к интегралу

$$\frac{1}{n}\int (a+bz)^p z^{\frac{m+1}{n}-1} dz .$$

2) Если $\dfrac{m+1}{n}$ — целое, полагаем $a + bz = t^N$, $a + bx^n = t^N$, где N — знаменатель дроби p.

3) Наконец, перепишем интеграл в виде

$$\frac{1}{n}\int \left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{\frac{m+1}{n}+p-1} dz .$$

Если $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое, полагаем $az^{-1} + b = t^N$, $ax^{-n} + b = t^N$, где N — знаменатель дроби p.

Перечисленные случаи исчерпывают возможности выражения интеграла через элементарные функции.

Пример.

$I = \int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. Здесь $p = -\dfrac{1}{4},\ n = 4,\ m = 0;\ \dfrac{m+1}{n} + p = 0$ — целое число. Полагаем $t = \sqrt[4]{\dfrac{1}{x^4} + 1},\ x = \left(t^4 - 1\right)^{-1/4}$ и получаем

$$I=-\frac{1}{4}\int\frac{\left(t^4-1\right)^{-5/4}4t^3}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{t^4-1}}}dt=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t+C.$$

§ 8 Интегрирование тригонометрических выражений

1⁰. $\int\sin^n x\cos^m x dx$ **,.**

Если m — нечетное число, рекомендуется подстановка $t=\sin x$; если n — нечетное число, $t=\cos x$; если n, m четны, выполним понижение степени по формулам

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Примеры. 1) $\int\cos^3 x dx=\left[t=\sin x\right]=\int\left(1-t^2\right)dt=t-\frac{t^3}{3}+C=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$.

2)

$$\int\sin^2 x\cos^4 x dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\left(1+\cos 2x\right)dx=$$

$$\frac{1}{16}\int\left(1-\cos 4x+2\sin^2 2x\cos 2x\right)dx=$$

$$\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+C.$$

В более общей ситуации, где n, m — рациональные числа, интеграл сводится к дифференциальному биному подстановкой $t=\sin^2 x$.

2^0. Интегралы $\int\sin\alpha x\sin\beta x dx,\ \int\cos\alpha x\cos\beta x dx,\ \int\sin\alpha x\cos\beta x dx$ находятся после преобразований произведений тригонометрических функций в суммы.

Пример.

$$\int\cos x\cos 2x\cos 3x dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos x+\cos 3x\right)\cos 3x dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+1\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{6}\sin 6x+x\right)+C.$$

3⁰. $\int R\left(\sin x,\ \cos x\right)dx$ **.**

Рационализация достигается универсальной подстановкой $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Действительно,

$$dt = \frac{dx}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)dx,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

интеграл принимает вид

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \left[t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right] = \int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

Подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ является универсальной: всегда достигается рационализация интеграла. В некоторых случаях можно рекомендовать более удобные подстановки.

Если $R(-u, v) \equiv -R(u, v)$, $R(u, -v) \equiv -R(u, v)$ или $R(-u, -v) \equiv R(u, v)$ то рационализация достигается подстановками $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \operatorname{tg} x$. соответственно.

Примеры.

$$\int \frac{dx}{\cos x(\sin x + 4)} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x(\sin x + 4)} = [t = \sin x] =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)(4+t)} = \int\left(\frac{1}{10}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{6}\frac{1}{1+t} - \frac{1}{15}\frac{1}{4+t}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{10}\ln|1-t| + \frac{1}{6}\ln|1+t| - \frac{1}{15}\ln|4+t| + C =$$

$$-\frac{1}{10}\ln|1-\sin x| + \frac{1}{6}\ln|1+\sin x| - \frac{1}{15}\ln|4+\sin x| + C.$$

$$I = \int \frac{\cos x dx}{3\cos x + 4\sin x} = \int \frac{dx}{3+4\operatorname{tg} x} = [t = \operatorname{tg} x] = \int \frac{dx}{(3+4t)\left(1+t^2\right)}.$$

Представим подынтегральную функцию суммой простейших:

$$\frac{1}{(3+4t)\left(1+t^2\right)} = \frac{A}{3+4t} + \frac{Bt+C}{1+t^2};$$

$$1 = A\left(1+t^2\right) + (Bt+C)(3+4t);$$

$$\begin{cases} A+4B=0, \\ 3B+4C=0, \\ A+3C=1, \end{cases}$$

$$A = \frac{16}{25},\ B = -\frac{4}{25},\ C = \frac{3}{25}.$$

Теперь

$$I=\frac{4}{25}\ln|3+4t|-\frac{2}{25}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{3}{25}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=\frac{4}{25}\ln\frac{|3+4t|}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{3}{25}\operatorname{arctg}t+C=\frac{4}{25}\ln|3\cos x+4\sin x|+\frac{3}{25}x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx=\int\frac{2dx}{\sin^2 2x+2\cos^2 2x}=$$

$$=\int\frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x+2}\frac{2dx}{\cos^2 2x}=\left[t=\operatorname{tg}2x\right]=\int\frac{dt}{t^2+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}+C.$$

4^0. $\displaystyle\int\frac{a_1\cos x+b_1\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx=Ax+B\ln|a\cos x+b\sin x|+C,\ a^2+b^2\neq 0$.

Действительно, выражения $a\cos x+b\sin x,\ -a\sin x+b\cos x$ линейно независимы, поэтому можно найти такие числа $A,\ B$, что

$$a_1\cos x+b_1\sin x=A\left(a\cos x+b\sin x\right)+B\left(\ -a\sin x+b\cos x\right)\ .$$

Интеграл запишется в виде

$$\int\left(A+B\frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}\right)dx=Ax+B\ln|a\cos x+b\sin x|+C\ .$$

Пример

$$\int \frac{13\cos x + 9\sin x}{3\cos x + 4\sin x}dx = Ax + B\ln\left|3\cos x + 4\sin x\right| + C,$$

$$\frac{13\cos x + 9\sin x}{3\cos x + 4\sin x} = A + B\frac{-3\sin x + 4\cos x}{3\cos x + 4\sin x},$$

$$13\cos x + 9\sin x = A\left(3\cos x + 4\sin x\right) + B\left(-3\sin x + 4\cos x\right),$$

$$3A + 4B = 13,$$

$$4A - 3B = 9,$$

$$A = 3,\ B = 1,$$

Ответ: $3x + \ln\left|3\cos x + 4\sin x\right| + C$

$$\int \frac{a_1\cos x + b_1\sin x + c_1}{a\cos x + b\sin x + c}dx = Ax + B\ln\left|a\cos x + b\sin x + c\right| + C\int \frac{1}{a\cos x + b\sin x + c}dx,\ a^2 + b^2 \neq 0.$$

Заметим, что

$$a_1\cos x + b_1\sin x + c_1 = A\left(a\cos x + b\sin x + c\right) + B\left(\ -a\sin x + b\cos x\right) + C\ ,$$

для интеграла получается требуемое представление.

Пример

$$\int \frac{7 + 4\cos x + 3\sin x}{3 + \cos x + 2\sin x}dx = 2x + \ln\left(3 + \cos x + 2\sin x\right) + \mathrm{arctg}\left(1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C$$