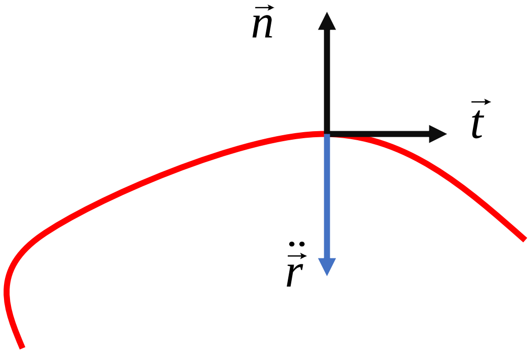
Лекция 26   29.11.2024

§ 5. Кривизна плоской кривой

1⁰. Определение



Пусть $\gamma:[0,\ S]\to\mathbb{R}^2$ — плоский гладкий путь с естественной параметризацией, $\vec{r}$ — соответствующая вектор-функция.
Для каждого $s\in[0,S]$, рассмотрим единичный касательный вектор $\vec{t}=\dot{\vec{r}}(s)$.
Через $\vec{n}$ обозначим единичный вектор, полученный поворотом $\vec{t}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.
Предположим еще, что $\vec{r}$ дважды непрерывно дифференцируема.
Поскольку

$$\forall s\ \left|\dot{\vec{r}}(s)\right|=1,\ \left(\dot{\vec{r}},\ \dot{\vec{r}}\right)=1,$$

то

$$\left(\ddot{\vec{r}},\ \dot{\vec{r}}\right)+\left(\dot{\vec{r}},\ \ddot{\vec{r}}\right)=0,\ \left(\ddot{\vec{r}},\ \dot{\vec{r}}\right)=0,$$

получается, что $\ddot{\vec{r}}$ ортогонален $\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$ коллинеарен вектору $\vec{n}$, $\ddot{\vec{r}}=k^*\vec{n}$.
Число k^* называется кривизной плоской кривой.
Кривизна k^* — это мгновенная скорость вращения единичного касательного вектора $\vec{t}(s)$.

Примеры

1) Прямолинейный путь

$$\begin{cases} x=x_0+ps, \\ y=y_0+qs,\ \ p^2+q^2=1 \end{cases}$$

Здесь касательный вектор $\vec{t}$ имеет координаты $(p,\ q)$, $\ddot{\vec{r}}=0$. Путь имеет нулевую кривизну $k^*=0$.
2) Окружность

$$\begin{cases} x=R\cos\dfrac{s}{R}, \\ y=R\sin\dfrac{s}{R} \end{cases}$$

радиуса R.

$$\begin{cases} \dot{x}=-\sin\dfrac{s}{R}, \\ \dot{y}=\cos\dfrac{s}{R}, \end{cases}\quad \begin{cases} \ddot{x}=-\dfrac{1}{R}\cos\dfrac{s}{R}, \\ \ddot{y}=-\dfrac{1}{R}\sin\dfrac{s}{R}, \end{cases}\quad k^*=\frac{1}{R}.$$

Для произвольной кривой число $R=\dfrac{1}{|k^*|}$ называется радиусом кривизны.

2^0. Формулы для вычисления кривизны

Пусть γ — путь на плоскости с естественной параметризацией,

$$\begin{cases} x = \varphi(s), \\ y = \psi(s) \end{cases} —$$

его параметрические уравнения.

Тогда

$$|k^*| = \left|\ddot{\vec{r}}\right| = \sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \ddot{\psi}^2}\ . \tag{1}$$

С другой стороны,

$$\ddot{\vec{r}} = k^* \vec{n},\ k^* = \left(\ddot{\vec{r}},\ \vec{n}\right),$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\varphi}\vec{i} + \ddot{\psi}\vec{j},\ \ \vec{n} = -\dot{\psi}\vec{i} + \dot{\varphi}\vec{j}\ ,$$

$$k^* = \ddot{\psi}\dot{\varphi} - \ddot{\varphi}\dot{\psi}\ . \tag{2}$$

Кривизной пути (кривой), отнесенного к произвольному параметру, называется кривизна эквивалентного пути, отнесенного к естественному параметру.

Пусть

$$\gamma : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \text{— путь на плоскости,}$$

$$\tilde{\gamma} : \begin{cases} x = \tilde{\varphi}(s), \\ y = \tilde{\psi}(s) \end{cases} \text{— эквивалентная естественная параметризация.}$$

Тогда

$$k^* = \ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}\ ,$$

$$\begin{cases} x' = \dot{x}s', \\ y' = \dot{y}s', \end{cases} \begin{cases} x'' = \ddot{x}s'^2 + \dot{x}s'', \\ y'' = \ddot{y}s'^2 + \dot{y}s'', \end{cases}$$

$$y''x' - x''y' = \ddot{y}\dot{x}s'^3 + \dot{x}\dot{y}s's'' - \ddot{x}\dot{y}s'^3 - \dot{x}\dot{y}s's'' =$$

$$= \left(\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}\right)s'^3 = k^* s'^3 = k^*\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2},$$

$$k^* = \frac{y''x' - x''y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{\psi''\varphi' - \varphi''\psi'}{\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^{3/2}}\ . \tag{3}$$

Если Γ — график функции f, то кривизна

$$k^* = \frac{f''(x_0)}{\left(1 + f'^2(x_0)\right)^{3/2}}\ . \tag{4}$$

Пример

Рассмотрим астроиду

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3} \quad (x, y>0).$$

$$x^{-1/3}+y^{-1/3}y'=0,\ y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3},$$

$$1+y'^2=\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}=\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}};$$

$$-\frac{1}{3}x^{-4/3}-\frac{1}{3}y^{-4/3}y'^2+y^{-1/3}y''=0,$$

$$3y^{-1/3}y''=x^{-4/3}+\frac{y^{-2/3}}{x^{2/3}}=\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{4/3}y^{2/3}}=\frac{a^{2/3}}{x^{4/3}y^{2/3}},$$

$$y''=\frac{a^{2/3}}{3x^{4/3}y^{1/3}},$$

$$k^*=\frac{1}{3(axy)^{1/3}},\ R=3(axy)^{1/3}.$$

3^0. Формулы Френе на плоскости

Пусть γ — путь на плоскости с естественной параметризацией.

Векторы $\vec{t}$, $\vec{n}$ образуют базис — сопровождающий базис Френе.

Имеют место формулы Френе

$$\begin{cases}\dot{\vec{t}}=k^*\vec{n},\\ \dot{\vec{n}}=-k^*\vec{t}.\end{cases} \tag{5}$$

Действительно, первая формула — определение кривизны. Дифференцирование соотношения

$$(\vec{t},\ \vec{n})=0$$

дает

$$(\dot{\vec{t}},\ \vec{n})+(\vec{t},\ \dot{\vec{n}})=0,\ k^*+(\vec{t},\ \dot{\vec{n}})=0,\ \dot{\vec{n}}=-k^*\vec{t}.$$

4^0. Приближение плоского пути прямой и окружностью

Для плоского пути

$$\gamma:[0,\ S]\to\mathbb{R}^2\ \begin{cases}x=\varphi(s),\\ y=\psi(s),\end{cases}\ \vec{r}=\varphi\vec{i}+\psi\vec{j}$$

рассмотрим касательный путь

γ_1 с вектор-функцией $\vec{r}_1=\vec{r}_0+\vec{t}_0\cdot(s-s_0)$.

($\vec{r}_0=\vec{r}(s_0),\ \vec{t}_0=\dot{\vec{r}}(s_0)$).

Поскольку $\vec{r}_1(s_0)=\vec{r}(s_0),\ \dot{\vec{r}}_1(s_0)=\dot{\vec{r}}(s_0)$, то в силу формулы Тейлора

$$\vec{r}(s)-\vec{r}_1(s)=o(s-s_0).$$

Если путь имеет ненулевую кривизну, можно рассмотреть окружность радиуса $R=\dfrac{1}{|k^*|}$,

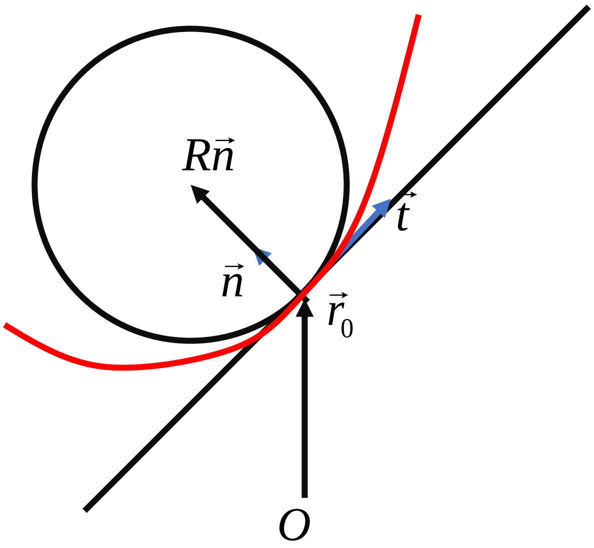
касающуюся касательной прямой в точке $M_0=\gamma(s_0)$, с тем же направлением выпуклости, что и γ. Для соответствующей вектор функции $\vec{r}_2$ справедливы равенства $\vec{r}_2(s_0)=\vec{r}(s_0)$, $\dot{\vec{r}}_2(s_0)=\dot{\vec{r}}(s_0)$, $\ddot{\vec{r}}_2(s_0)=\ddot{\vec{r}}(s_0)$, поэтому

$$\vec{r}(s)-\vec{r}_2(s)=o\left((s-s_0)^2\right)$$

(Для определенности считаем $k^*>0$.

Центр окружности находится в точке с радиус-вектором

$$\vec{r}^*=\vec{r}_0+R\vec{n}_0.$$



Естественная параметризация γ_2 этой окружности дается формулами

$$\begin{cases} x=x^*+R\cos\left(\dfrac{s-s_0}{R}+\alpha_0\right),\\ y=y^*+R\sin\left(\dfrac{s-s_0}{R}+\alpha_0\right),\end{cases}$$

здесь α_0 подобрано так, чтобы $\gamma_2(s_0)=\gamma(s_0)$, т.е. так, что

$$\vec{n}_0=-\cos\alpha_0\vec{i}-\sin\alpha_0\vec{j},\ \vec{t}_0=-\sin\alpha_0\vec{i}+\cos\alpha_0\vec{j}.$$

Для пути γ_2

$$\begin{cases} \dot{x}=-\sin\left(\dfrac{s-s_0}{R}+\alpha_0\right),\\ \dot{y}=\cos\left(\dfrac{s-s_0}{R}+\alpha_0\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}=-\dfrac{1}{R}\cos\left(\dfrac{s-s_0}{R}+\alpha_0\right),\\ \ddot{y}=-\dfrac{1}{R}\sin\left(\dfrac{s-s_0}{R}+\alpha_0\right)\end{cases}$$

Следовательно,

$$\vec{r}_2(s_0)=\vec{r}_0=\vec{r}(s_0),$$

$$\dot{\vec{r}}_2(s_0)=\vec{t}_0=\dot{\vec{r}}(s_0),\qquad)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2(s_0)=k^*\vec{n}_0=\ddot{\vec{r}}(s_0).$$

5^0. Путь на плоскости, имеющий нулевую кривизну, прямолинеен.

Действительно,

$$\ddot{\varphi}=\ddot{\psi}=0,\ \dot{\varphi}=const,\ \dot{\psi}=const,\ \dot{\varphi}=p,\ \dot{\psi}=q,\ p^2+q^2=1,$$

$$\begin{cases} x=\varphi(s)=x_0+ps,\\ y=\psi(s)=y_0+qs.\end{cases}$$

Путь на плоскости, имеющий постоянную кривизну $k^*=\dfrac{1}{R}$, является параметризацией окружности радиуса R.

Действительно,

$$\ddot{\psi}\dot{\varphi}-\ddot{\varphi}\dot{\psi}=\frac{1}{R},\ \dot{\varphi}^2+\dot{\psi}^2=1,\ \begin{cases}\dot{\varphi}(s)=-\sin\alpha(s),\\ \dot{\psi}(s)=\cos a(s),\end{cases}\ \begin{cases}\ddot{\varphi}(s)=-\cos a(s)\dot{\alpha}(s),\\ \ddot{\psi}(s)=-\sin\alpha(s)\dot{\alpha}(s),\end{cases}$$

$$\ddot\psi\dot\varphi-\ddot\varphi\dot\psi=\dot\alpha,\ \dot\alpha=\frac{1}{R},\ \alpha=\frac{s-s_0}{R},\ \begin{cases}\dot\varphi(s)=-\sin\frac{s-s_0}{R},\\ \dot\psi(s)=\cos\frac{s-s_0}{R},\end{cases}\ \begin{cases}x=\varphi(s)=x_0+R\cos\frac{s-s_0}{R},\\ y=\psi(s)=y_0+R\sin\frac{s-s_0}{R}.\end{cases}$$

§ 6 Кривизна и кручение кривой в пространстве

1[0]. Определение.

Пусть γ — гладкий путь в пространстве с естественной параметризацией, $M_0=\gamma(s_0)$, $\vec t(s_0)$ — единичный касательный вектор.

1) Число $k=\left|\dot{\vec t}(s_0)\right|$ называется кривизной пути.

Если $k\neq 0$, положим $\vec n=\frac{\dot{\vec t}}{k}$. Вектор $\vec n$ называется главной нормалью пути γ.

2) Плоскость, проходящая через точку M_0 и параллельная векторам $\vec t$, $\vec n$, называется соприкасающейся плоскостью пути γ. Уравнение соприкасающейся плоскости можно записать в виде

$$(\vec r-\vec r_0,\ \vec t_0,\ \vec n_0)=0,$$

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ \dot\varphi & \dot\psi & \dot\chi\\ \ddot\varphi & \ddot\psi & \ddot\chi\end{vmatrix}=0.$$

Вектор $\vec b=\vec t\times\vec n$ называется бинормалью.

Тройка векторов $\vec t,\ \vec n,\ \vec b$ называется сопровождающим базисом Френе.

Поскольку $\left|\vec b\right|=1$, то $\dot{\vec b}\perp\vec b$.

По определению $\dot{\vec t}=k\vec n$. Далее,

$$\left(\vec b,\ \vec t\right)=0,\ \left(\dot{\vec b},\ \vec t\right)+\left(\vec b,\ \dot{\vec t}\right)=0.$$

Но $\left(\vec b,\ \dot{\vec t}\right)=\left(\vec b,\ k\vec n\right)=0$, так что и $\left(\dot{\vec b},\ \vec t\right)=0$, $\dot{\vec b}$ коллинеарен вектору $\vec n$,

$$\dot{\vec b}=-\kappa\vec n.$$

3) Число κ называется кручением пути γ в точке M_0.

Кручение — скорость вращения бинормали.

Имеют место формулы Френе

$$\begin{aligned}\dot{\vec t}&=k\vec n\\ \dot{\vec n}&=-k\vec t+\kappa\vec b\\ \dot{\vec b}&=-\kappa\vec n\end{aligned}\tag{1}$$

Первая и третья формулы составляют определения кривизны и кручения.

Поскольку $\left|\vec n\right|=1$, то $\dot{\vec n}\perp\vec n$, $\dot{\vec n}=\alpha\vec t+\beta\vec b$. Дифференцируя равенство

$$\left(\vec t,\ \vec n\right)=0,$$

получаем

$$\left(\dot{\vec t},\ \vec n\right)+\left(\vec t,\ \dot{\vec n}\right)=0,\ k+\alpha=0,\ \alpha=-k.$$

Точно так же убеждаемся в том, что $\beta=\kappa$.

2^0. Вычисление кривизны и кручения.

Для естественной параметризации

$$k = \left|\dot{\vec{t}}\right| = \left|\ddot{\vec{r}}\right|, \tag{2}$$

$$k = \sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \ddot{\psi}^2 + \ddot{\chi}^2}\ .$$

Для произвольной параметризации

$$\vec{r}' = \dot{\vec{r}} s',$$

$$\vec{r}'' = \ddot{\vec{r}} s'^2 + \dot{\vec{r}} s'',$$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} s'^3,$$

$$\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right| = \left|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right| s'^3 = \left|\ddot{\vec{r}}\right| s'^3 = k\left|\vec{r}'\right|^3.$$

Получаем формулы

$$k = \frac{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|}{\left|\vec{r}'\right|^3}, \tag{3}$$

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \varphi' & \varphi'' \\ \psi' & \psi'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \psi' & \psi'' \\ \chi' & \chi'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \chi' & \chi'' \\ \varphi' & \varphi'' \end{vmatrix}^2}}{\left(\varphi'^2 + \psi'^2 + \chi'^2\right)^{3/2}}. \tag{4}$$

Перейдем к вычислению кручения.

Для естественной параметризации

$$\dot{\vec{r}} = \vec{t},$$

$$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{t}} = k\vec{n},$$

$$\dddot{\vec{r}} = \dot{k}\vec{n} + k\dot{\vec{n}} = \dot{k}\vec{n} + k\left(-k\vec{t} + \kappa\vec{b}\right),$$

$$\left(\dot{\vec{r}},\ \ddot{\vec{r}},\ \dddot{\vec{r}}\right) = k^2\kappa,$$

$$\kappa = \frac{\left(\dot{\vec{r}},\ \ddot{\vec{r}},\ \dddot{\vec{r}}\right)}{k^2}. \tag{5}$$

Для произвольной параметризации

$$\vec{r}' = \dot{\vec{r}} s',$$

$$\vec{r}'' = \ddot{\vec{r}} s'^2 + \dot{\vec{r}} s'',$$

$$\vec{r}''' = \dddot{\vec{r}} s'^3 + 3\ddot{\vec{r}} s' s'' + \dot{\vec{r}} s''',$$

$$\left(\vec{r}',\ \vec{r}'',\ \vec{r}'''\right) = \left(\dot{\vec{r}},\ \ddot{\vec{r}},\ \dddot{\vec{r}}\right) s'^6 = k^2\kappa\left|\vec{r}'\right|^6 = \left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|^2 \kappa$$

$$\kappa = \frac{\left(\vec{r}',\ \vec{r}'',\ \vec{r}'''\right)}{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|^2} \tag{6}$$

3^0. Если путь γ проходит в плоскости α, то $\vec{t}$ и $\vec{n}$ параллельны этой плоскости, $\vec{b} \perp \alpha$,

$$\vec{b} = const, \dot{\vec{b}} = 0, \ \kappa = 0$$

Наоборот, если $\kappa = 0$, то кривая лежит в некоторой плоскости.

Доказательство.

$\dot{\vec{b}} = 0, \vec{b} = const = \vec{b}_0$. Кривая лежит в плоскости $\left(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{b}_0\right) = 0$, поскольку

$$\left(\vec{r}(s) - \vec{r}_0, \vec{b}_0\right)^{\bullet} = \left(\dot{\vec{r}}(s), \vec{b}_0\right) = \left(\vec{t}, \vec{b}_0\right) = 0,$$

$$\left(\vec{r}(s) - \vec{r}_0, \vec{b}_0\right) = const, \ \left(\vec{r}(s) - \vec{r}_0, \vec{b}_0\right) = \left(\vec{r}(s_0) - \vec{r}_0, \vec{b}_0\right) = 0.$$

4^0. Пример

Винтовая линия

$$x = a\cos t, \ y = a\sin t, \ z = bt \, .$$

Здесь

$$x' = -a\sin t, \ y' = a\cos t, \ z' = b; \ \ |\vec{r}'| = \sqrt{a^2 + b^2} = c \, .$$

Естественная параметризация дается формулами

$$x = a\cos\frac{s}{c}, \ y = a\sin\frac{s}{c}, \ z = b\frac{s}{c} \, .$$

Вычислив производные

$$\dot{x} = -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \ \dot{y} = \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \ \dot{z} = \frac{b}{c};$$

$$\ddot{x} = -\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \ \ddot{y} = -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, \ \ddot{z} = 0,$$

приходим к заключению, что кривизна

$$k = \frac{a}{c^2} \, .$$

Далее,

$$\vec{n}\left(-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0\right),$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}, \ \vec{b}\left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

$$\dot{\vec{b}}\left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\right), \ \dot{\vec{b}} = -\frac{b}{c^2}\vec{n}.$$

Получается, что кручение

$$\kappa = \frac{b}{c^2} \, .$$

Повторим вычисления в исходной параметризации:

$\bar{r}\left(a\cos t, a\sin t, bt\right)$

$\bar{r}'\left(-a\sin t, a\cos t, b\right) \quad \left|\bar{r}'\right| = \sqrt{a^2+b^2} = c$

$\bar{r}''\left(-a\cos t, -a\sin t, 0\right)$

$\bar{r}'\times\bar{r}''\left(ab\sin t, -ab\cos t, a^2\right) \left|\bar{r}'\times\bar{r}''\right| = \sqrt{a^2b^2+a^4} = ac$

$k = \dfrac{ac}{c^3} = \dfrac{a}{c^2}$

$\bar{r}'''\left(a\sin t, -a\cos t, 0\right)$

$\left(\bar{r}', \bar{r}'', \bar{r}'''\right) = a^2 b$

$\kappa = \dfrac{a^2 b}{a^2 c^2} = \dfrac{b}{c^2}$