Лекции 24 – 25 22.11.2024 – 26.11.2024

Глава VII. Элементы дифференциальной геометрии

§ 1. Дифференцирование вектор-функций

1⁰. Понятие вектор-функции. Координатные функции.

Если каждому $t \in \Delta$ по некоторому правилу поставлен в соответствие вектор $\vec{r}(t)$, то говорят, что на промежутке Δ определена вектор-функция $\vec{r}$.
Если $\vec{r}$ — вектор-функция на промежутке Δ, а в пространстве фиксирован базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то при каждом t вектор $\vec{r}(t)$ можно разложить по этому базису и записать его в виде

$$\vec{r}(t) = \varphi(t) i + \psi(t) j + \chi(t) \vec{k}.$$

Функции φ, ψ, χ называются координатными функциями вектор-функции $\vec{r}$. Наоборот, имея тройку функций φ, ψ, χ, мы можем построить вектор функцию $\vec{r}$ с координатными функциями φ, ψ, χ.

2⁰. Предел и непрерывность вектор-функции.

В пространстве векторов роль расстояния между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняет длина $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$ разности векторов.

Определение
Вектор-функция $\vec{r}$ имеет предел $\vec{a}$ при $t \to t_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \left|\vec{r}(t) - \vec{a}\right| < \varepsilon,$$

т.е. если

$$\left|\vec{r}(t) - \vec{a}\right| \underset{t \to t_0}{\to} 0.$$

Предложение 1.
Пусть $\vec{r}$ — вектор функция с координатными функциями φ, ψ, χ, $\vec{a}$ — вектор с координатами (a_x, a_y, a_z).
Тогда

$$\vec{r}(t) \underset{t \to t_0}{\to} \vec{a} \ \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(t) \underset{t \to t_0}{\to} a_x, \\ \psi(t) \underset{t \to t_0}{\to} a_y, \\ \chi(t) \underset{t \to t_0}{\to} a_z \end{cases}$$

Определение.
Вектор-функция $\vec{r}$ называется непрерывной в точке t_0, если

$$\vec{r}(t) \underset{t \to t_0}{\to} \vec{r}(t_0).$$

Предложение 2.
Для непрерывности вектор-функции необходима и достаточна непрерывность ее координатных функций.
Предложение 3.
Пусть $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ — вектор-функции, λ — числовая функция.

Тогда
1)

$$\lim_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t)\right)=\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)+\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t),$$
$$\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\vec{r}_1(t)=\lim_{t\to t_0}\lambda(t)\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t),$$
$$\lim_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t),\,\vec{r}_2(t)\right)=\left(\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t),\,\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)\right),$$
$$\lim_{t\to t_0}\left(\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\right)=\lim_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)\times\lim_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)$$

2) Если вектор-функции $\vec{r}_1,\,\vec{r}_2$ и функция λ непрерывны, то непрерывны и функции
$$\vec{r}_1+\vec{r}_2,\ \lambda\vec{r}_1,\ \left(\vec{r}_1,\,\vec{r}_2\right),\ \vec{r}_1\times\vec{r}_2\,.$$

3⁰. Производная вектор-функции

Определение

Предел
$$\vec{r}'(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}$$
называется производной вектор-функции $\vec{r}$ в точке t_0.

Вектор-функция, имеющая производную называется дифференцируемой.

Линейная функция
$$d\vec{r}(t_0):\ d\vec{r}(t_0)(\Delta t)=\vec{r}'(t_0)\Delta t$$
называется дифференциалом.

Приращение дифференцируемой функции записывается в виде
$$\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)=\vec{r}'(t)\Delta t+o(\Delta t)$$

Предложение 4.

Пусть $\vec{r}$ — вектор-функция с координатными функциями $\varphi,\,\psi,\,\chi$.

Тогда $\vec{r}$ дифференцируема в точке t_0 в том и только в том случае, если $\varphi,\,\psi,\,\chi$ дифференцируемы в этой точке, при этом
$$\vec{r}'(t_0)=\varphi'(t_0)\,\bar{i}+\psi'(t_0)\,\bar{j}+\chi'(t_0)\,\bar{k}\,.$$

Предложение 5.

Если вектор-функции $\vec{r}_1,\vec{r}_2$ и функция λ дифференцируемы, то дифференцируемы и функции $\vec{r}_1+\vec{r}_2,\ \lambda\vec{r}_1,\ \left(\vec{r}_1,\,\vec{r}_2\right),\ \vec{r}_1\times\vec{r}_2$, при этом
$$\left(\vec{r}_1+\vec{r}_2\right)'=\vec{r}_1{}'+\vec{r}_2{}',$$
$$\left(\lambda\vec{r}_1\right)'=\lambda'\vec{r}_1+\lambda\vec{r}_1{}',$$
$$\left(\vec{r}_1,\,\vec{r}_2\right)'=\left(\vec{r}_1{}',\,\vec{r}_2\right)+\left(\vec{r}_1,\,\vec{r}_2{}'\right),$$
$$\left(\vec{r}_1\times\vec{r}\right)'=\vec{r}_1'\times\vec{r}+\vec{r}_1\times\vec{r}_2'$$

4⁰. Дифференцирование сложной функции

Если функции $\vec{r},\,\lambda$ дифференцируемы, то $\vec{\rho}=\vec{r}\circ\lambda$ дифференцируема,
$$\vec{\rho}'(u)=\vec{r}'\left(\lambda(u)\right)\lambda'(u)$$

5^0. Теорема Лагранжа

Теорема 1.

Пусть вектор-функция $\vec{r}$ дифференцируема на отрезке $[a,\, b]$.

Тогда найдется $\xi \in (a,\, b)$, такое что

$$\left|\vec{r}(b)-\vec{r}(a)\right| \le \left|\vec{r}'(\xi)\right|(b-a).$$

Доказательство.

Положим $\vec{p}=\vec{r}(b)-\vec{r}(a)$.

Неравенство очевидно, если $\vec{p}=0$.

В случае $\vec{p}\ne 0$ положим

$$\varphi: \varphi(t)=\left(\vec{r}(t),\, \vec{p}\right).$$

По теореме Лагранжа

$$\exists \xi \in (a,\, b) \;\; \varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)(b-a),$$

т.е.

$$|\vec{p}|^2=\left(\vec{p},\, \vec{p}\right)=\left(\vec{r}'(\xi),\, \vec{p}\right)(b-a)\le \left|\vec{r}'(\xi)\right|\left|\vec{p}\right|(b-a).$$

Деление на $|\vec{p}|>0$ дает требуемое неравенство.

6^0. Формула Тейлора

Теорема 2.

Если вектор-функция $\vec{r}$ имеет в точке t_0 производные до n-го порядка включительно, то

$$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\vec{r}'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}\vec{r}''(t_0)(t-t_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\vec{r}^{(n)}(t_0)(t-t_0)^n+o\left((t-t_0)^n\right).$$

§ 2 Путь в пространстве и на плоскости

1^0. Введение системы координат в геометрическом пространстве приводит к представлению геометрического пространства в виде совокупности $\mathbb{R}^3$ упорядоченных троек вещественных чисел. Плоскость представляется совокупностью $\mathbb{R}^2$ упорядоченных пар вещественных чисел.

Для вычисления расстояния между точками $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$, $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$ имеем формулу

$$\rho(M_1,\, M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

С каждой точкой M связывают ее радиус-вектор $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$. Отметим, что

$$\rho(M_1,\, M_2)=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|, \text{ где } \vec{r}_1=\overrightarrow{OM_1},\ \vec{r}_2=\overrightarrow{OM_2}.$$

Важнейшими свойствами расстояния являются

1) положительность

$$\rho(M_1,\, M_2)\ge 0; \quad \rho(M_1,\, M_2)=0 \Leftrightarrow M_1=M_2;$$

2) симметрия

$$\rho(M_1,\, M_2)=\rho(M_2,\, M_1);$$

3) неравенство треугольника

$$\rho(M_1,\, M_2)\le \rho(M_1,\, M_3)+\rho(M_3,\, M_2).$$

2^0. **Путь в пространстве (на плоскости)** — это непрерывное отображение

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \ \left(\mathbb{R}^2\right)$$

отрезка в пространство (на плоскость).
Отображение γ называется непрерывным в точке t_0, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in [a, b]\ |t - t_0| < \delta \Rightarrow \rho\big(\gamma(t),\ \gamma(t_0)\big) < \varepsilon .$$

Пусть $t \in [a, b],\ M = \gamma(t),\ M(x,\ y,\ z)$. Определим на отрезке $[a,\ b]$ функции $\varphi, \psi,\ \chi$, полагая $\varphi(t) = x, \psi(t) = y,\ \chi(t) = z$. Эти функции называются координатными функциями отображения γ.
Наоборот, имея функции $\varphi, \psi,\ \chi$, можно построить соответствующий путь γ.

Предложение 1.

Для непрерывности отображения γ необходима и достаточна непрерывность координатных функций $\varphi, \psi,\ \chi$.

Доказательство.

1) Необходимость. Пусть γ непрерывно. Непрерывность $\varphi, \psi,\ \chi$ следует из неравенства

$$\left|\varphi(t) - \varphi(t_0)\right| \le \sqrt{\big(\varphi(t) - \varphi(t_0)\big)^2 + \big(\psi(t) - \psi(t_0)\big)^2 + \big(\chi(t) - \chi(t_0)\big)^2} .$$

2) Достаточность. Пусть $\varphi, \psi,\ \eta$ непрерывны в точке $t_0 \in [a, b]$.
Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, подберем такое $\delta > 0$, что

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \left|\varphi(t) - \varphi(t_0)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},\ \left|\psi(t) - \psi(t_0)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},\ \left|\chi(t) - \chi(t_0)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} .$$

Если $|t - t_0| < \delta$, то

$$\rho\big(\gamma(t),\ \gamma(t_0)\big) = \sqrt{\big(\varphi(t) - \varphi(t_0)\big)^2 + \big(\psi(t) - \psi(t_0)\big)^2 + \big(\chi(t) - \chi(t_0)\big)^2} < \varepsilon .$$

С путем γ свяжем вектор-функцию, которая имеет те же координатные функции $\varphi, \psi,\ \chi$, что и путь γ. Непрерывность γ и соответствующей вектор-функции равносильны.
3^0. Пусть

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \ —$$

некоторый путь.
Образ $\Gamma = \gamma\big([a, b]\big)$ называется носителем пути.
Точки $A = \gamma(a),\ B = \gamma(b)$ называются началом и концом пути.
Если начало и конец совпадают ($\gamma(a) = \gamma(b)$), путь называется замкнутым.
Если γ инъективно, путь называется простым.
Если γ — замкнутый путь и

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2 \vee \{t_1,\ t_2\} = \{a, b\},$$

γ называется простым замкнутым путем.
Если $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ — путь, то путь

$$\gamma_- : [a, b] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_-(\tau) = \gamma(a + b - \tau)$$

называется встречным.

Пути $\gamma:[a, b]\to\mathbb{R}^3$, $\tilde{\gamma}:\left[\tilde{a}, \tilde{b}\right]\to\mathbb{R}^3$ называются эквивалентными, если существует такая непрерывная и строго возрастающая биекция $\lambda:\left[\tilde{a}, \tilde{b}\right]\to[a, b]$, что $\tilde{\gamma}=\gamma\circ\lambda$.

Совокупность эквивалентных путей называется кривой.

Впрочем, иногда кривой называют просто носитель пути.

Имея пути $\gamma_1:[a, b]\to\mathbb{R}^3$, $\gamma_2:[b, c]\to\mathbb{R}^3$, для которых $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$, можно построить их произведение (соединение)

$$\gamma:[a, c]\to\mathbb{R}^3,\ \gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(t),\ t\in[a, b],\\ \gamma_2(t),\ t\in[b, c].\end{cases}$$

С функцией f на отрезке $[a, b]$ и ее графиком Γ связывают путь

$$\gamma:\begin{cases}x=t,\\ y=f(t).\end{cases}$$

§ 3 Гладкий путь

Определение

Путь γ называется гладким, если его координатные функции $\varphi, \psi, \ \chi$ непрерывно дифференцируемы (имеют непрерывные производные $\varphi', \psi', \ \chi'$) и

$$\forall t\ \ \varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)\neq 0,$$

т.е. непрерывно дифференцируема соответствующая вектор-функция $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$ нигде не обращается в нуль.

Для гладких путей эквивалентность понимают в гладком смысле:

$$\tilde{\gamma}=\gamma\circ\lambda,\ \lambda \text{ непрерывно дифференцируема, } \forall t\ \ \lambda'(t)\neq 0.$$

Пусть γ — гладкий путь, $\vec{r}$ — соответствующая вектор функция.

Возьмем $t_0\in[a, b]$, положим $M_0=\gamma(t_0)$.

Вектор $\vec{a}_0=\vec{r}\,'(t_0)$ называется касательным вектором пути γ.

Прямая l_0, проходящая через точку M_0, имеющая направляющий вектор $\vec{a}_0=\vec{r}\,'(t_0)$, называется касательной прямой пути γ

Пусть $t\neq t_0$, $M=\gamma(t)$, l — прямая, проходящая через точки M_0, M

($\dfrac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}\underset{t\to t_0}{\to}\vec{r}\,'(t_0)\neq 0$;

для t, близких к t_0 имеем $M\neq M_0$).

Прямая l имеет направляющий вектор $\vec{a}(t)=\dfrac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0}\underset{t\to t_0}{\to}\vec{a}_0$.

Для угла $\varphi(t)$ между прямыми l, l_0 (и векторами $\vec{a}, \vec{a}_0$) имеем

$$\cos\varphi(t)\underset{t\to t_0}{\to}1,\ \ \varphi(t)\underset{t\to t_0}{\to}0.$$

Считая, что угол φ выполняет роль расстояния между прямыми, мы скажем, что $l(t)\underset{t\to t_0}{\to}l_0$.

Касательная l_0 — предельное положение секущей l.

Параметрические уравнения касательной можно записать в векторной

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{r}\,'(t_0)h$$

и координатной

$$\begin{cases} x = x_0 + \varphi'(t_0)h, \\ y = y_0 + \psi'(t_0)h, \quad -\infty < h < +\infty \\ z = z_0 + \chi'(t_0)h, \end{cases}$$

формах.

§ 4 Длина пути

Определение

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \left(\mathbb{R}^2\right)$ — путь в пространстве (на плоскости).

Совокупность точек $\tau : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ называется разбиением отрезка $[a, b]$;

$\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$ — отрезки разбиения, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ — длины этих отрезков, $\lambda_\tau = \max\limits_k \Delta t_k$ — ранг (мелкость) разбиения.

Положим $M_k = \gamma(t_k)$ (для $k = 0, 1, \dots, n$), рассмотрим ломаную Γ_τ с вершинами в точках M_k. Эта ломаная имеет длину $S_\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} |M_{k-1}M_k|$.

Если длины ломаных, соответствующих всевозможным разбиениям, образуют ограниченное множество, то путь γ называется спрямляемым. Верхняя грань S этого множества называется длиной пути,

$$S = \sup_\tau S_\tau .$$

Неспрямляемому пути можно приписать длину $+\infty$.

Упражнение

Эквивалентные пути, встречные пути имеют одинаковые длины.

Теорема 1.

Гладкий путь спрямляем.

Доказательство.

Пусть γ — гладкий путь, $\vec{r}$ — соответствующая вектор-функция. Тогда функция $|\vec{r}'|$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. По теореме Вейерштрасса она ограничена, положим $M = \max\limits_t |\vec{r}'(t)|$.

По теореме Лагранжа

$$\forall t', t'' \in [a, b] \ \left|\vec{r}(t') - \vec{r}(t'')\right| \le M\,|t' - t''| .$$

Если τ — некоторое разбиение, то длина соответствующей ломаной

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{n} \left|\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})\right| \le M \sum_{k=1}^{n} |t_k - t_{k-1}| = M \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = M \cdot (b-a) .$$

Видим, что путь γ спрямляем и его длина

$$S \le M \cdot (b-a) .$$

Пусть

$$\gamma : [a,\, b] \to \mathbb{R}^3 \text{ — гладкий путь,}$$

S — его длина.

Для $a \le a_1 < b_1 \le b$ обозначим через $\gamma_{a_1 b_1}$ часть пути γ, соответствующую параметрическому отрезку $[a_1,\, b_1]$, $\gamma_{a_1 b_1} = \gamma|_{[a_1,\, b_1]}$, а через $L_{a_1 b_1}$ — длину этой части.

Полученная "функция отрезка" аддитивна:

$$L_{a_1 b_1} + L_{b_1 c_1} = L_{a_1 c_1}.$$

Теперь рассмотрим функцию l на отрезке $[a,\, b]$:

$$l(t) = L_{a,t} \text{ — длина пути } \gamma_{at} = \gamma|_{[a,\, t]}.$$

Теорема 2.

Функция l непрерывно дифференцируема,

$$l' = |\vec{r}\,'|.$$

Пройденный путь имеет скорость своей производной.

Доказательство.

Пусть $t_0 \in (a,\, b)$. Возьмем произвольное $t \in (t_0,\, b)$. Положим

$$M(t) = \max_{u \in [t_0,\, t]} |\vec{r}\,'(u)|.$$

Непрерывность $|\vec{r}\,'|$ влечет соотношение

$$M(t) \underset{t \to t_0 + 0}{\to} |\vec{r}\,'(t_0)|.$$

В теореме 1 установлена оценка

$$l(t) - l(t_0) \le M(t)(t - t_0).$$

С другой стороны, длина $\gamma_{t_0 t}$ не может быть меньше длины прямолинейного отрезка с концами $\gamma(t_0),\, \gamma(t)$;

$$l(t) - l(t_0) \ge |\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)|$$

Таким образом,

$$\left| \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} \right| \le \frac{l(t) - l(t_0)}{t - t_0} \le M(t).$$

Поскольку $\left| \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} \right| \underset{t \to t_0}{\to} |\vec{r}\,'(t_0)|$, то по теореме о милиционерах

$$\frac{l(t) - l(t_0)}{t - t_0} \underset{t \to t_0 + 0}{\to} |\vec{r}\,'(t_0)|,\; l'_+(t_0) = |\vec{r}\,'(t_0)|.$$

Аналогично устанавливается, что $l'_-(t_0) = |\vec{r}\,'(t_0)|$.

Пример.

Для параметризации окружности

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases}$$

имеем $\varphi'(t) = -R\sin t,\; \psi'(t) = R\cos t,\; |\vec{r}\,'(t)| = R$. По теореме 2

$$l'(t) = R,\; l(t) = R \cdot t.$$

Длина окружности оказывается равной

$$l(2\pi) = 2\pi R.$$

Установленное в теореме 2 равенство

$$\forall t \;\; l'(t) = \left|\vec{r}\,'(t)\right|$$

в координатах примет вид

$$\forall t \;\; l'^2(t) = \varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t).$$

Умножение на Δt^2 дает равенство

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

для дифференциалов функций

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t) \end{cases} \text{ и } s = l(t).$$

Естественная параметризация

Пусть

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \text{ — гладкий путь,}$$

S — его длина.

Функция l непрерывно дифференцируема, строго возрастает на $[a, b]$; имеет множество значений $[0, S]$. На отрезке $[0, S]$ определим обратную функцию $\lambda = l^{-1}$, строго возрастающую и непрерывно дифференцируемую.

Путь $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \lambda \sim \gamma$ называется естественной параметризацией кривой γ. Говорят, что путь $\tilde{\gamma}$ получен переходом к естественному параметру — длине дуги.

Если параметризация γ использует естественный параметр, то

$$\forall s \in [0, S] \; l(s) = s.$$

Дифференцирование по естественному параметру традиционно обозначают точкой.

Имеют место равенства

$$\dot{l}(s) = 1, \; \left|\dot{\vec{r}}(s)\right| = 1.$$

Замечание. Часто естественным называют и параметр t, отличающийся от длины дуги s постоянным слагаемым, $s = t - t_0$.