ЛЕКЦИЯ 22 18.04.2025

§ 6. Условный экстремум

1^0. Понятие условного экстремума

Пусть $f^1,\ldots,f^m$ — непрерывно дифференцируемые функции $n+m$ переменных, определенные в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^{n+m}$; $f^1(x_0)=\cdots=f^m(x_0)=0$; матрица Якоби отображения с координатными функциями $f^1,\ldots,f^m$ имеет ранг m.
Рассмотрим систему уравнений

$$E:\begin{cases} f^1(x)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^m(x)=0. \end{cases} \tag{1}$$

Соотношения (1) будем называть уравнениями связи.
Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция, определенная в окрестности точки x_0.
Точка x_0 (удовлетворяющая условиям (1)) называется точкой условного минимума функции f при условиях (1), если существует такая окрестность точки x_0, что для любой точки x, лежащей в этой окрестности и удовлетворяющей уравнениям (1), справедливо неравенство $f(x)\ge f(x_0)$. При выполнении противоположного неравенства точку x_0 называют условным максимумом. Условные минимумы и максимумы объединяются под названием условные экстремумы. Если выполняются строгие неравенства, точку x_0 называют строгим минимумом, строгим максимумом, строгим экстремумом.
Точки условных экстремумов функции f — это точки экстремумов сужения $f\big|_E$ функции f на множество E решений системы уравнений связи.

2^0. Прямой метод отыскания условных экстремумов.

Система (1) удовлетворяет условиям теоремы о неявных функциях. Считая для определенности, что

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^{n+m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial x^{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial x^{n+m}} \end{vmatrix} \ne 0, \tag{*}$$

можно выразить $x^{n+1},\ldots,x^{n+m}$ из системы (1) и записать равносильную систему

$$\begin{cases} x^{n+1}=\varphi^1(x^1,\ldots,x^n),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{n+m}=\varphi^m(x^1,\ldots,x^n). \end{cases} \tag{2}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$g: g(x^1,\ldots,x^n)=f\left(x^1,\ldots,x^n,\varphi^1(x^1,\ldots,x^n),\ldots,\varphi^m(x^1,\ldots,x^n)\right).$$

Отыскание условного экстремума функции f сведено к обычному экстремуму функции g.
x_0 — условный минимум f $\Leftrightarrow$ y_0 — минимум g.

Если применить обозначения предыдущего параграфа, то проведенные построения можно записать короче.
Положим

$$y=\left(x^1,\dots,x^n\right),\ z=\left(x^{n+1},\dots,x^{n+m}\right),\ x=\left(y,z\right);$$
$$F=\left(f^1,\dots,f^m\right),\ \Phi=\left(\varphi^1,\dots,\varphi^m\right).$$

Тогда системы (1), (2) запишутся в виде $F\left(y,z\right)=0$ и $y=\Phi\left(z\right)$ соответственно. Условие (*) превратится в $\det\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$. Функция g определится равенством $g\left(y\right)=f\left(y,\Phi\left(y\right)\right)$.

3^0. Метод множителей Лагранжа.

Теорема 1. Пусть x_0 — точка экстремума функции f при условиях (1).

Тогда существуют такие числа $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, что для функции $L=f+\lambda_1 f^1+\ldots+\lambda_m f^m$ точка x_0 является стационарной.

Функция L называется функцией Лагранжа, числа $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ — множителями Лагранжа.

Доказательство. Поскольку на множестве E функции $f^1,\dots,f^m$ обращаются в нуль, то при любом выборе множителей Лагранжа функция L имеет условный экстремум в точке x_0.
Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x^{n+1}}=0,\dots,\frac{\partial L}{\partial x^{n+m}}=0 \tag{3}$$

с неизвестными $\lambda_1,\dots,\lambda_m$. Система имеет ненулевой определитель, по теореме Крамера система имеет единственное решение $\lambda_1,\dots,\lambda_m$.
Рассмотрим функцию

$$L\left(x^1,\dots,x^n,\varphi^1\left(x^1,\dots,x^n\right),\dots,\varphi^m\left(x^1,\dots,x^n\right)\right)=L\left(y,\Phi\left(y\right)\right).$$

Поскольку функции $\varphi^1,\dots,\varphi^m$ удовлетворяют системе (1), т.е. $F\left(y,\Phi\left(y\right)\right)=0$, то эта функция совпадает с g.

По необходимому условию экстремума $\frac{\partial g}{\partial x^1}=0,\dots,\frac{\partial g}{\partial x^n}=0$. Но

$$\frac{\partial g}{\partial x^k}=\frac{\partial L}{\partial x^k}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial x^{n+i}}\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^k}=\frac{\partial L}{\partial x^k}\ \text{ для } k=1,\dots,n,$$

так что $\frac{\partial L}{\partial x^1}=0,\dots,\frac{\partial L}{\partial x^n}=0$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть x_0 — стационарная точка функции Лагранжа L.
Тогда
1) если $d^2L\left(x_0,h\right)>0$ для любого $h\neq 0$, удовлетворяющего системе

$$\begin{cases}\frac{\partial f^1}{\partial x^1}\left(x_0\right)h^1+\cdots+\frac{\partial f^1}{\partial x^{n+m}}\left(x_0\right)h^{n+m}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}\left(x_0\right)h^1+\cdots+\frac{\partial f^m}{\partial x^{n+m}}\left(x_0\right)h^{n+m}=0,\end{cases}\quad \text{т.е. } dF\left(x_0,h\right)=0 \tag{4}$$

то x_0 — точка строгого условного минимума функции f;
2) если $d^2L(x_0,h)<0$ для любого $h\neq 0$, удовлетворяющего системе (4), то x_0 — точка строгого условного максимума функции f;
3) если существуют h', h'', удовлетворяющие системе (4), для которых $d^2L(x_0,h')<0,\ d^2L(x_0,h'')>0$, то x_0 не является точкой условного экстремума.

Доказательство.
Ограничимся рассмотрением пункта 1).
Вернемся к рассмотрению функции

$$g\left(x^1,\dots,x^n\right)=L\left(x^1,\dots,x^n,\varphi^1\left(x^1,\dots,x^n\right),\dots,\varphi^m\left(x^1,\dots,x^n\right)\right),\ \text{ т.е. } g(y)=L\left(y,\Phi(y)\right).$$

n переменных. Обозначим через Ψ отображение, действующее по формуле

$$\Psi\left(x^1,\dots,x^n\right)=\left(x^1,\dots,x^n,\varphi^1\left(x^1,\dots,x^n\right),\dots,\varphi^m\left(x^1,\dots,x^n\right)\right),\quad \Psi(y)=\left(y,\Phi(y)\right).$$

Для функции g получается равенство

$$g(y)=L\left(\Psi(y)\right).$$

Точка x_0 — условный минимум функции f в том и только в том случае, если $y_0=\left(x_0^1,\dots,x_0^n\right)$ — минимум функции g.
Запишем дифференциалы функции g.

$$dg(y,\xi)=dL(x,h),\ \ x=\Psi(y),\ h=d\Psi(y,\xi)$$

$$d^2g(y,\xi)=d^2L(x,h)+dL\left(x,d^2\Psi(\xi)\right)$$

Поскольку x_0 — стационарная точка функции Лагранжа L, то

$$d^2g(y_0,\xi)=d^2L(x_0,h)=d^2L\left(x_0,d\Psi(y_0,\xi)\right)$$

Если $\xi\neq 0$, то $h=d\Psi(y_0,\xi)\neq 0$ и удовлетворяет (4)

$$\left(\forall y\ F\left(\Psi(y)\right)=0,\ dF\left(x_0,d\Psi(y_0)\right)=0\right),$$

так что по условию теоремы

$$d^2g(y_0,\xi)>0.$$

По достаточному условию минимума y_0 — минимум функции g, x_0 — условный минимум функций L и f.

4⁰. Примеры.
1) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции
$u=x+2y+3z,\ \ x^2+y^2+z^2\le 14,\ z\ge 0.$
Мы ищем наименьшее и наибольшее значения линейной функции на полушарии. Линейная функция не имеет стационарных точек, поэтому искомые значения следует искать на границе, которая состоит из диска $z=0,\ x^2+y^2\le 14$ и полусферы $z>0,\ x^2+y^2+z^2=14$. На диске функция принимает вид $u=x+2y$. Мы опять имеем дело с линейной функцией, ее наименьшее и наибольшее значения следует искать на окружности $x^2+y^2=14$.
Подозрительные точки — это точки условного экстремума функции $u=x+2y$ при условии $x^2+y^2=14$. Рассмотрим функцию Лагранжа $L=x+2y+\lambda\left(x^2+y^2-14\right)$. Ее частные

производные $\frac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x,\ \frac{\partial L}{\partial y}=2+2\lambda y$ обращаются в нуль при условии $2x=y$, т.е. в точках $\left(\sqrt{14/5},\ 2\sqrt{14/5},\ 0\right),\ \left(-\sqrt{14/5},\ -2\sqrt{14/5},\ 0\right)$.

На полусфере следует найти условные экстремумы функции $u=x+2y+3z$ при условии $x^2+y^2+z^2=14$. Рассмотрим функцию Лагранжа $L=x+2y+3z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-14\right)$. Из условий $1+2\lambda x=0,\ 2+2\lambda y=0,\ 3+2\lambda z=0$ равенства нулю частных производных функции Лагранжа получаем соотношения $2x=y,\ 3x=z$. На полусфере этим условиям удовлетворяет точка $(1,2,3)$. Получился список из трех точек. Результаты вычислений представлены таблицей

(x,y,z)	u
$\left(\sqrt{14/5},\ 2\sqrt{14/5},\ 0\right)$	$\sqrt{70}$
$\left(-\sqrt{14/5},\ -2\sqrt{14/5},\ 0\right)$	$-\sqrt{70}$
$(1,2,3)$	14

Видим, что функция принимает свое наибольшее значение 14 в точке $(1,2,3)$, а наименьшее значение $\left(-\sqrt{70}\right)$ — в точке $\left(-\sqrt{14/5},\ -2\sqrt{14/5},\ 0\right)$.

2) Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Найдем наибольшее значение функции $u=x_1\cdots x_n$ на множестве, определенном условиями $x_1+\cdots+x_n=1,\ x_1\ge 0,\dots,x_n\ge 0$. Функция принимает положительные значения и обращается в нуль, если обращается в нуль хотя бы один сомножитель. Наибольшее значение функция принимает в точке, удовлетворяющей условию $x_1>0,\dots,x_n>0$. Искомая точка — точка условного экстремума функции u при условии $x_1+\cdots+x_n=1$. Рассмотрим функцию Лагранжа $L=u+\lambda\left(x_1+\cdots+x_n\right)$. Ее частные производные даются формулами

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=x_1\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n+\lambda=\frac{u}{x_i}+\lambda\,.$$

В стационарной точке оказываются выполненными условия $x_1=\cdots=x_n$. Единственной такой точкой является $\left(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)$. Функция принимает свое наибольшее значение $\frac{1}{n^n}$ в точке $\left(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right)$.

Пусть теперь $a_1,\dots,a_n>0$. Тогда для $x_i=\frac{a_i}{a_1+\cdots+a_n}>0$ выполняется условие $x_1+\cdots+x_n=1$.

Поэтому $x_1\cdots x_n\le\frac{1}{n^n}$, $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\le\frac{1}{n}$, т.е.

$$\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\le\frac{a_1+\cdots a_n}{n}\,.$$