Лекции 22–23 15 – 19.11.2024

§ 5. Выпуклые функции

1^0. Определение

f — функция на промежутке Δ.

Функция f называется выпуклой (выпуклой вниз), если выполняется неравенство Йенсена

$$\forall x_1,\ x_2\ \forall t \in [0,\,1]\ \ f\left((1-t)\,x_1 + tx_2\right) \le (1-t)\,f\left(x_1\right) + tf\left(x_2\right). \tag{1}$$

Функция f называется строго выпуклой, если

$$\forall x_1,\ x_2\ \ x_1 \ne x_2\ \ \forall t \in (0,\,1)\ \ f\left((1-t)\,x_1 + tx_2\right) < (1-t)\,f\left(x_1\right) + tf\left(x_2\right).$$

Функция f называется вогнутой (выпуклой вверх), если

$$\forall x_1,\ x_2\ \forall t \in [0,\,1]\ \ f\left((1-t)\,x_1 + tx_2\right) \ge (1-t)\,f\left(x_1\right) + tf\left(x_2\right) \tag{2}$$

Предложение 1

f выпукла $\Leftrightarrow$ $-f$ вогнута

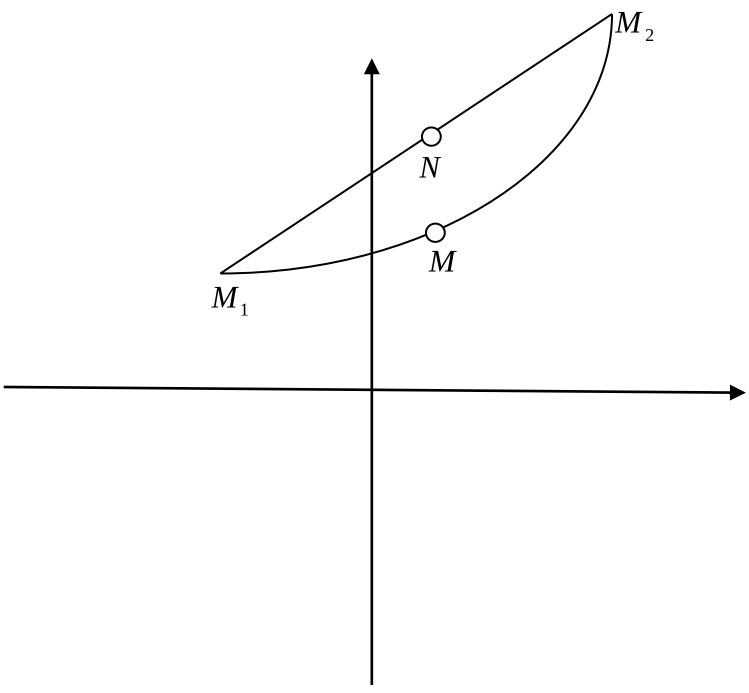
2^0. Геометрический смысл выпуклости

Положим $y_1 = f\left(x_1\right),\ y_2 = f\left(x_2\right)$.

Точка $N\left(x,\ y\right)$,

$$\begin{cases} x = (1-t)\,x_1 + tx_2, \\ y = (1-t)\,y_1 + ty_2, \end{cases}$$

лежит на отрезке с концами $M_1\left(x_1,\ y_1\right),\ M_2\left(x_2,\ y_2\right)$, а точка $M\left(x,\ f\left(x\right)\right)$ — на графике функции. Неравенство (1) можно сейчас записать в виде $f\left(x\right) \le y$. Последнее означает, что график располагается ниже любой своей хорды.



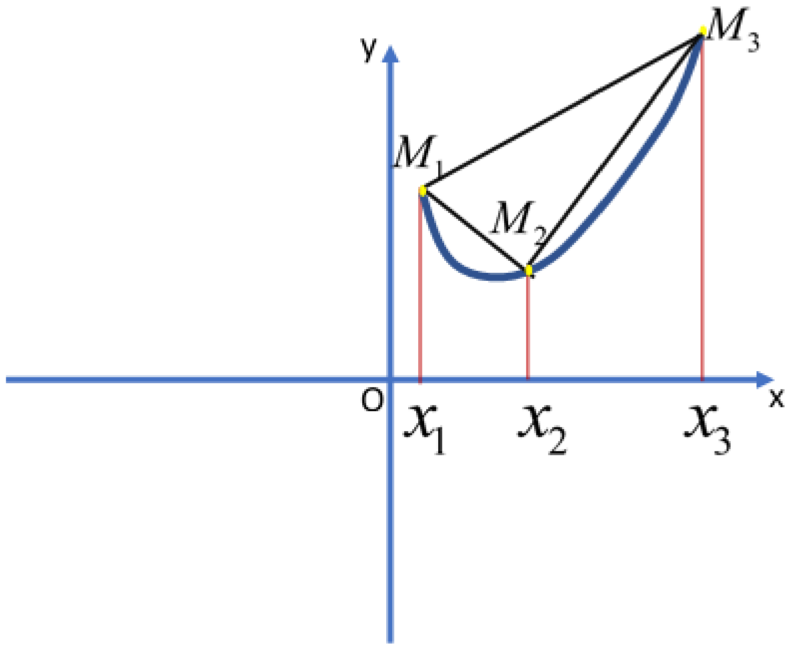
3^0. Непрерывность выпуклой функции

Предложение 2. Полезное неравенство

Пусть f — выпуклая функция на промежутке Δ, $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \Delta,\ \ x_1 < x_2 < x_3$.

Тогда

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \tag{3}$$



Доказательство

Заметим, что $x_2 = (1-t)x_1 + tx_3$, где

$$t = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1},\ 1-t = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}. \tag{4}$$

По неравенству Йенсена

$$f(x_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_3),$$

т.е.

$$f(x_2)-f(x_1) \le t\big(f(x_3)-f(x_1)\big) = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\big(f(x_3)-f(x_1)\big), \tag{5}$$

$$f(x_2)-f(x_3) \le (1-t)\big(f(x_1)-f(x_3)\big) = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\big(f(x_1)-f(x_3)\big). \tag{6}$$

Из (5), (6) получается (3).

Теорема 1. Непрерывность выпуклой функции

Пусть f — выпуклая функция на промежутке $\Delta = \langle a,\, b \rangle$.

Тогда f непрерывна на интервале $(a,\, b)$.

Доказательство

Пусть $x_0 \in (a,\, b)$.

Подберем $x_1,\, x_2 \in (a,\, b)$ так, чтобы $x_1 < x_0 < x_2$.

Если $x \in (x_0,\, x_2)$, то

$$A = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \le \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = B$$

$$A(x - x_0) \le f(x) - f(x_0) \le B(x - x_0)$$

По теореме о милиционерах

$$f(x) - f(x_0) \underset{x \to x_0 + 0}{\to} 0$$

Аналогично устанавливаем, что

$$f(x) \underset{x \to x_0 - 0}{\to} f(x_0),$$

так что

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\to} f(x_0),$$

f непрерывна в точке x_0.

Замечание. На концах промежутка непрерывность может нарушаться. Например, функция

$$f:\ f(x) = \begin{cases} 0,\ x \in (0,\, 1), \\ 1,\ x = 0,\ x = 1 \end{cases}$$

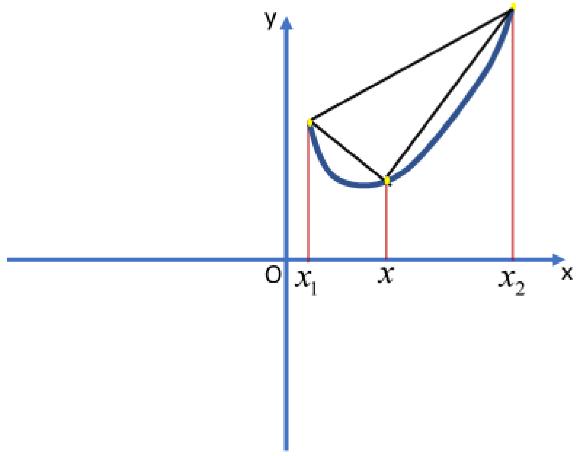
является выпуклой.

4⁰. Условия выпуклости в терминах производных

Теорема 2

Пусть f — дифференцируемая функция на промежутке Δ.

Тогда f является выпуклой в том и только в том случае, если f' возрастает.



Доказательство.

1) Необходимость.

Пусть f — выпуклая функция. Выберем $x_1,\ x_2 \in \Delta,\ x_1 < x_2$.

Для произвольного $x \in (x_1,\ x_2)$ справедливо "полезное" неравенство

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{7}$$

Предельный переход при $x \to x_1+0$ дает

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \tag{8}$$

а при $x \to x_2-0$ —

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'(x_2). \tag{9}$$

Из (8), (9) следует неравенство

$$f'(x_1) \le f'(x_2),$$

f' возрастает.

2) Достаточность.

Пусть $x_1 < x_2$, $t \in (0, 1)$, $x = (1-t)x_1 + tx_2 \in (x_1,\ x_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}&(1-t)f(x_1)+tf(x_2)-f(x)=(1-t)\big(f(x_1)-f(x)\big)+t\big(f(x_2)-f(x)\big)=\\&(1-t)f'(\xi)(x_1-x)+tf'(\eta)(x_2-x)=-(1-t)t(x_2-x_1)f'(\xi)+(1-t)t(x_2-x_1)f'(\xi)=\\&=(1-t)t(x_2-x_1)\big(f'(\eta)-f'(\xi)\big)\ge 0\end{aligned}$$

(здесь $\xi \in (x_1,\ x),\ \eta \in (x,\ x_2)$)

Замечания

1) В теореме 2 предполагается дифференцируемость. Однако, из "полезного" неравенства вытекает монотонность отношения $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Выпуклая функция имеет односторонние производные во всех точках, причем $f'_-(x) \le f'_+(x)$. На концах промежутка односторонние производные могут быть бесконечными.

2) Строгая выпуклость равносильна строгому возрастанию.

Теорема 3.

Пусть f дважды дифференцируема на Δ.

Тогда

$$f \text{ выпукла} \Leftrightarrow f'' \ge 0$$

Доказательство.

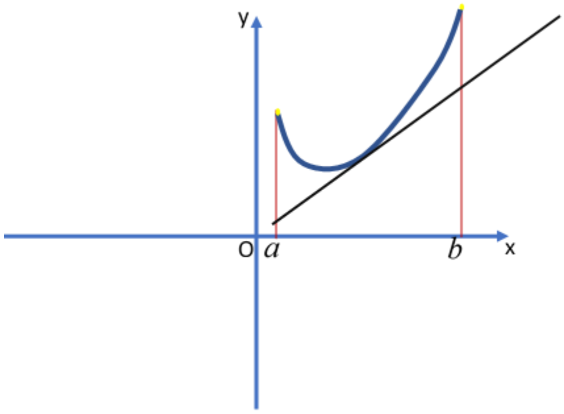
$$f \text{ выпукла} \Leftrightarrow f' \text{ возрастает} \Leftrightarrow f'' \ge 0.$$

5^0. Условия выпуклости в терминах касательных

Теорема 4.

Пусть f дифференцируема на Δ.

Тогда f выпукла в **том** и только в том случае, если ее график лежит выше любой своей касательной



Доказательство

1) Необходимость

Пусть $x_0 \in \Delta$. Касательная — это график линейной функции

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(касательной функции). Нужно показать, что

$$\forall x \in \Delta \quad f(x) \ge l(x).$$

Для $x > x_0$ было получено неравенство

$$f'(x_0) \le \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

из которого следует, что

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = l(x).$$

Аналогично для $x < x_0$ получается

$$f'(x_0) \geq \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}, \; f'(x_0)(x_0 - x) \geq f(x_0) - f(x),$$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = l(x).$$

2) Достаточность

Пусть $x_1 < x_2$, тогда

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1), \; f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

и

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2), \; f'(x_2) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

так что $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. f' возрастает, f — выпуклая функция.

6⁰. Точки перегиба

Определение

Пусть f дифференцируема на (a, b), $x_0 \in (a, b)$.

x_0 называется точкой перегиба, если она отделяет участок выпуклости от участка вогнутости:

$\exists \delta > 0$ f выпукла на $(x_0 - \delta, x_0)$ и вогнута на $(x_0, x_0 + \delta)$ или

f вогнута на $(x_0 - \delta, x_0)$ и выпукла на $(x_0, x_0 + \delta)$.

Теорема 5

Пусть f дважды дифференцируема на (a, b), $x_0 \in (a, b)$.

Тогда

1) Необходимое условие перегиба.

Если x_0 — точка перегиба, то

$$f''(x_0) = 0.$$

2) Достаточное условие перегиба.

Если f'' меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 — точка перегиба.

7⁰. Три неравенства

1) Предложение 3. Неравенство Йенсена (для нескольких точек).

Пусть f – выпуклая функция на Δ; $x_1,\ x_2, \ldots, x_n \in \Delta,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Тогда

$$f\left(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\right) \leq \lambda_1 f\left(x_1\right) + \cdots + \lambda_n f\left(x_n\right). \tag{10}$$

Доказательство (по индукции).

Базу индукции обеспечивает определение выпуклой функции.

Проведем индукционный переход. Предположим, что неравенство справедливо для n точек. Пусть $x_1,\ x_2, \ldots, x_n,\ x_{n+1} \in \Delta,\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n,\ \lambda_{n+1} \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$.

Положим $t = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n,\ \lambda_1' = \dfrac{\lambda_1}{t}, \ldots,\ \lambda_n' = \dfrac{\lambda_n}{t},\ x' = \lambda_1' x_1 + \cdots + \lambda_n' x_n$. Получаем неравенства

$$\begin{aligned}
&f\left(x'\right) \leq \lambda_1' f\left(x_1\right) + \cdots + \lambda_n' f\left(x_n\right),\\
&f\left(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) = f\left(t\, x' + \left(1-t\right) x_{n+1}\right) \leq \lambda_1 f\left(x_1\right) + \cdots + \lambda_n f\left(x_n\right) + \lambda_{n+1} f\left(x_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Предложение 4 Неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим

Пусть $x_1, \ldots,\ x_n > 0$.

Тогда

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\ . \tag{11}$$

Доказательство.

Применим неравенство Йенсена к логарифмической функции

$$f:\ f\left(x\right) = \ln x.$$

Поскольку $f'\left(x\right) = \dfrac{1}{x},\ f''\left(x\right) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$, то функция вогнута.

$$\forall x_1,\ x_2,\dots,\ x_2>0\ \ \ln\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\ge\frac{\ln x_1+\dots+\ln x_n}{n}=\ln\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$$

$$\forall x_1,\ x_2,\dots,\ x_2>0\quad \frac{x_1+\dots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\ .$$

Предложение 5. Неравенство Гельдера

Пусть $a_1,\dots,\ a_n;\ b_1,\dots,\ b_n>0;\ p,\ q>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{1/q}. \tag{12}$$

Доказательство

Применим неравенство Йенсена к степенной функции

$$f:\ f(x)=x^p$$

с $p>1$.

Поскольку $f'(x)=px^{p-1},\ f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0$, то функция выпукла.

Пусть $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n>0\ \ \lambda_1,\ \lambda_2,\dots,\ \lambda_n>0,\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$, тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k\right)^p\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k^p\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k\le\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k^p\right)^{1/p}$$

Полагая здесь

$$x_k=a_kb_k^{1-q}b$$
$$\lambda_k=\frac{b_k^q}{b},\ b=\sum_{k=1}^{n}b_k^q,$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\le\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^q}{b}a_k^pb_k^{p(1-q)}b^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}b^{\frac{p-1}{p}}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}b^{1/q}=\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^q\right)^{1/q}$$

Упражнения

1) Произведение выпуклой функции на положительное число — выпуклая функция.

Произведение выпуклой функции на отрицательное число — вогнутая функция.

2) Сумма двух выпуклых функций — выпуклая функция.

3) Если $F = f \circ \varphi$, а φ — выпуклая, f — выпуклая, возрастающая, то F — выпуклая.

4) Если f строго возрастает и выпукла, то $g = f^{-1}$ вогнута.

5) Выпуклая функция, отличная от постоянной, не может достигать наибольшего значения во внутренней точке промежутка.

§ 6. Асимптоты графика функции

Определение.

Прямая l называется асимптотой графика Γ, если расстояние от точки, уходящей на бесконечность по Γ, бесконечно мало,

$$\rho(M, l) \underset{\substack{M \to \infty \\ M \in \Gamma}}{\longrightarrow} 0$$

Предложение 1.

Если $f(x) \underset{x \to a \pm 0}{\longrightarrow} \pm\infty$, то прямая $l : x = a$ — вертикальная асимптота графика Γ функции f.

Предложение 2.

Пусть f — определена и непрерывна на $[a, +\infty)$.

Прямая $l : y = b$ — горизонтальная асимптота графика Γ функции f в том и только в том случае, если $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} b$.

Предложение 3.

Пусть f — определена и непрерывна на $[a, +\infty)$.

Прямая $l : y = kx + b$ — наклонная асимптота графика Γ функции f в том и только в том случае, если

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right)$$

Доказательство.

1) Необходимость. Пусть прямая $l:\ y=kx+b$ — наклонная асимптота, тогда

$$f(x)-(kx+b)\underset{x\to+\infty}{\to}0,$$

$$\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\underset{x\to+\infty}{\to}0,$$

$$\frac{f(x)}{x}-k\underset{x\to+\infty}{\to}0,$$

$$f(x)-kx\underset{x\to+\infty}{\to}b.$$

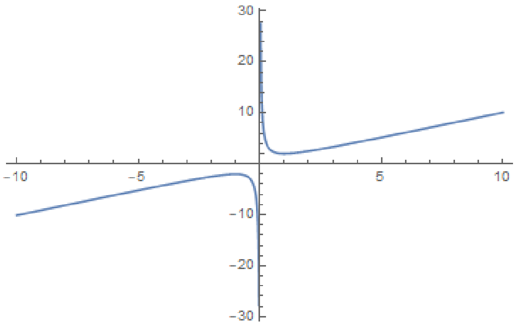
2) Достаточность. Если $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$, то $f(x)-(kx+b)\underset{x\to+\infty}{\to}0$, прямая $l:\ y=kx+b$ — наклонная асимптота.

Замечание

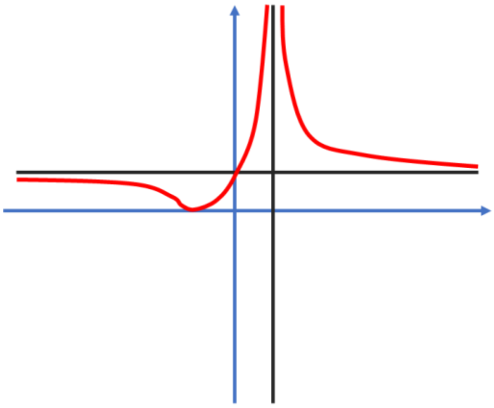
Горизонтальная асимптота — частный случай наклонной. Асимптота единственна. Если мы нашли горизонтальную асимптоту, то искать наклонную не следует.

Примеры.

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x=0$ — вертикальная асимптота, $y=x$ — наклонная асимптота.



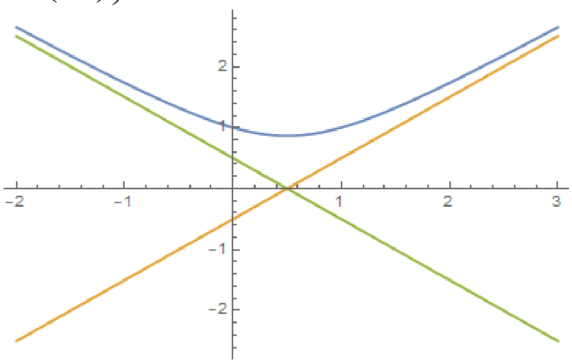
2) $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$, $x=1$ — вертикальная асимптота, $y=1$ — горизонтальная асимптота.



3) $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{=}x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=x\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=$$

$$=x\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x-\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$



$y=x-\dfrac{1}{2}$ — наклонная асимптота.

Поскольку

$f(x)-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\underset{x\to+\infty}{=}\dfrac{3}{8x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{3}{8x}>0$, то

график приближается к асимптоте сверху.

§ 7. Построение графика функции

I. Область определения.

Четность. Периодичность. Непрерывность.

Пределы. Асимптоты.

II. Производная.

Монотонность. Экстремумы.

III. Вторая производная.

Выпуклость. Перегибы.

Пример. $f(x)=\sqrt[3]{x^2(x-3)}$.

I. Функция непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$$f(x)\underset{x\to\infty}{=} x-1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

$y=x-1$ — наклонная асимптота. График располжен под асимптотой при $x\to+\infty$ и над асимптотой при $x\to-\infty$.

II. $f'(x)=\dfrac{x-2}{(x-3)^{2/3}x^{1/3}}$,

$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

III. $f''(x)=-\dfrac{2}{(x-3)^{5/3}x^{4/3}}$

$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	3	$(2, +\infty)$
выпуклая	выпуклая	перегиб	вогнутая