## *Лекция 21      12.11.2024*

# Глава VI Исследование функций методами дифференциального исчисления

## *§ 1. Условия постоянства функции*

### Теорема 1.

Пусть $f$ — функция на промежутке $\Delta$.

Для того, чтобы функция $f$ была постоянной на промежутке $\Delta$, необходимо и достаточно, чтобы она имела нулевую производную,

$$f = const \;\Leftrightarrow\; f' = 0 .$$

### Доказательство

### 1) Необходимость

Если функция постоянна, то она имеет нулевую производную.

### 2) Достаточность

Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in \Delta$. Возьмем $x \in \Delta,\ x \neq x_0$. По теореме Лагранжа найдется такая точка $\xi$, лежащая между $x_0,\ x$, что

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0 .$$

Итак,

$$\forall x \in \Delta \quad f(x) = f(x_0), \qquad f = const .$$

### Пример.

Доказать тождество $\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2},\ x \in (-1, 1)$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2},\ x \in (-1, 1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{4x^2}{\left(1-x^2\right)^2}} \cdot 2\frac{1-x^2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = 0 .$$

Поскольку $f(0) = 0$, то $\forall x \in (-1, 1) \quad f(x) = 0$.

## *§ 2. Условия монотонности функции*

### 1⁰. Определение

Пусть $f$ — функция на промежутке $\Delta$.

Функция $f$ называется

1) возрастающей, если

$$\forall x_1,\ x_2 \quad x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2),$$

2) убывающей, если

$$\forall x_1,\ x_2 \quad x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2),$$

3) монотонной, если она является возрастающей или убывающей;

4) строго возрастающей, если

$$\forall x_1,\ x_2 \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

5) строго убывающей, если

$$\forall x_1,\ x_2 \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

6) строго монотонной, если она является строго возрастающей или строго убывающей.

### 2⁰.Теорема 1

$f$ определена и непрерывна на промежутке $\Delta = \langle a,\ b \rangle$, дифференцируема на $(a,\ b)$.

Тогда

$$f \text{ возрастает} \Leftrightarrow \quad f' \ge 0,$$

$$f \text{ убывает} \Leftrightarrow \quad f' \le 0.$$

### Доказательство

Проведем доказательства для возрастающих функций.

### 1) Необходимость

Пусть функция $f$ возрастает. Возьмем некоторую точку $x_0 \in (a,\ b)$. Если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$, $f(x) - f(x_0) \ge 0$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$. Если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$, $f(x) - f(x_0) \le 0$,

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. При любом выборе $x \neq x_0$ имеет место неравенство $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.

Предельный переход $(x \to x_0)$ дает $f'(x_0) \geq 0$.

## 2) Достаточность

Пусть $f' \geq 0$.

Возьмем $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа найдется такая точка $\xi \in (x_1,\ x_2)$, что

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \geq 0 .$$

## Дополнение 1. Достаточное условие строгой монотонности

$$\left(\forall x \in \Delta \ \ f'(x)>0\right) \Rightarrow f \text{ строго возрастает;}$$

$$\left(\forall x \in \Delta \ \ f'(x)>0\right) \Rightarrow f \text{ строго убывает.}$$

## Дополнение 2. О строгой монотонности

$$f \text{ строго возрастает} \Leftrightarrow \left((f' \geq 0),\ \left(\forall x_1 < x_2\ \exists x \in (x_1,\ x_2)\ \ f'(x)>0\right)\right)$$

$$f \text{ строго убывает} \Leftrightarrow \left((f' \leq 0),\ \left(\forall x_1 < x_2\ \exists x \in (x_1,\ x_2)\ \ f'(x)<0\right)\right)$$

## Примеры

1) $f : f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ строго возрастает на $(0,\ +\infty)$.

Достаточно установить строгое возрастание функции

$$g(x)=\ln f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\left(\ln(x+1)-\ln x\right).$$

Для функции $g$ имеем

$g'(x)=\ln(x+1)-\ln x+x\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}\right)=\ln(x+1)-\ln x-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{\xi}-\dfrac{1}{x+1}>0$ (здесь $\xi \in (x,\ x+1)$ )

2) $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x,\ x \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Рассмотрим функцию $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

Для этой функции

$$g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x\left(x-\operatorname{tg} x\right)}{x^2}<0.$$

Функция $g$ строго убывает,

$$g(x)>g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi},\ \frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi},\ \sin x>\frac{2}{\pi}x \text{ при } x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

## *§ 3. Экстремумы функции*

### **1⁰. Определение**

Пусть функция $f$ определена и непрерывна в окрестности $V_0$ точки $x_0$.

1) $x_0$ — точка максимума функции $f$, если найдется такая окрестность $V\subset V_0$ точки $x_0$, что

$$\forall x\in V \quad f(x)\le f(x_0). \tag{1}$$

2) $x_0$ — точка минимума функции $f$, если найдется такая окрестность $V\subset V_0$ точки $x_0$, что

$$\forall x\in V \quad f(x)\ge f(x_0). \tag{2}$$

3) $x_0$ — точка экстремума функции $f$, если $x_0$ — точка максимума функции $f$ или $x_0$ — точка минимума функции $f$.

4) $x_0$ — точка строгого максимума функции $f$, если найдется такая окрестность $V\subset V_0$ точки $x_0$, что

$$\forall x\in \dot V \quad f(x)<f(x_0).$$

5) $x_0$ — точка строгого минимума функции $f$, если найдется такая окрестность $V\subset V_0$ точки $x_0$, что

$$\forall x\in \dot V \quad f(x)>f(x_0).$$

6) $x_0$ — точка строгого экстремума функции $f$, если $x_0$ — точка строгого максимума функции $f$ или $x_0$ — точка строгого минимума функции $f$.

### **2⁰. Теорема 1. Необходимое условие экстремума**

Пусть функция $f$ определена и непрерывна в окрестности $V_0$ точки $x_0$.

Если $x_0$ — точка экстремума и функция $f$ имеет производную $f'(x_0)$, то

$$f'(x_0)=0. \tag{3}$$

Справедливость теоремы 1 следует из теоремы Ферма.

$x_0$ называется стационарной, если $f'(x_0)=0$.

## Замечания

1) В точке экстремума функция может не быть дифференцируемой. Например для $f(x)=|x|$ $x_0=0$ — точка минимума, $f$ не имеет производной.

2) Стационарная точка может не быть экстремальной. Например $f(x)=x^3$ строго возрастает на всей прямой, но $f'(0)=0$.

## 3⁰. Теорема 2. Достаточные условия экстремума в терминах первой производной

Пусть функция $f$ определена и непрерывна в окрестности $V_0$ точки $x_0$, $f$ имеет производную во всех точках, кроме, может быть, точки $x_0$.

1) Пусть

$$\exists\delta>0\quad \forall x\in(x_0-\delta,\,x_0)\ f'(x)>0,\ \forall x\in(x_0,\,x_0+\delta)\ f'(x)<0$$

Тогда $x_0$ — точка строгого максимума.

2) Пусть

$$\exists\delta>0\quad \forall x\in(x_0-\delta,\,x_0)\ f'(x)<0,\ \forall x\in(x_0,\,x_0+\delta)\ f'(x)>0$$

Тогда $x_0$ — точка строгого минимума.

## **Доказательство** (для минимума)

В условиях теоремы $f$ строго убывает на $(x_0-\delta,\,x_0]$, $\forall x\in(x_0-\delta,\,x_0)\ f(x)>f(x_0)$, $f$ строго возрастает на $[x_0,\,x_0+\delta)$, $\forall x\in(x_0-\delta,\,x_0)\ f(x)>f(x_0)$.

Получается, что $\forall x\in(x_0-\delta,\,x_0+\delta)\ x\neq x_0$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$, $x_0$ — точка строгого минимума.

## $4^0$. Теорема 3. Достаточные условия экстремума в терминах второй производной

Пусть функция $f$ определена и дифференцируема в окрестности $V_0$ точки $x_0$, имеет вторую производную в точке $x_0$.

Пусть выполнено необходимое условие экстремума. $f'(x_0)=0$.

Тогда

если $f''(x_0)>0$, то $x_0$ — точка строгого минимума,

если $f''(x_0)<0$, то $x_0$ — точка строгого максимума.

## Доказательство

Пусть $f''(x_0)>0$. Тогда для некоторого $\delta>0$ неравенство $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$ выполняется при всех $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta),\ x\neq x_0$. Следовательно, $f'(x)<0$ при $x\in(x_0-\delta,\ x_0)$, $f'(x)>0$ при $x\in(x_0,\ x_0+\delta)$, $x_0$ — точка строгого минимума по теореме 2.

## Замечание

Если $f''(x_0)=0$, в точке $x_0$ функция $f$ может иметь максимум, минимум или не иметь экстремума вовсе. Так, функция $f(x)=x^3$ не имеет в нуле экстремума, $f(x)=x^4$ имеет минимум, а $f(x)=-x^4$ — максимум.

# *§ 4. Наибольшее и наименьшее значения функции*

## Схема отыскания наибольшего и наименьшего значений на отрезке

Пусть функция $f$ определена и непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, имеет производную во всех точках интервала $(a,\ b)$.

По II теореме Вейерштрасса функция $f$ достигает наименьшего и наибольшего значений. Такие значения функция может принимать на одном из концов отрезка или во внутренней точке. Если наименьшее или наибольшее значение функция принимает во внутренней точке, то эта точка является стационарной. Мы получаем список "подозрительных точек" , включающий в себя концевые точки $a,\ b$ и внутренние стационарные точки. Следует вычислить значения функции во всех точках списка, выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Решение вопроса существования и поиска наименьшего и наибольшего значений функции на промежутках других типов требует более детального исследования функции.

Примеры

1) $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x,\ x\in[0,\ \pi/2]$.

Производная $f'(x)=3\sin x\cos x(\cos x-\sin x)$ обращается в $0$ в точке $\dfrac{\pi}{4}$. "Подозрительный список" состоит из 3 точек $0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}$. Заметив, что $f(0)=f(\pi/2)=1$, а $f(\pi/4)=1/\sqrt{2}$, приходим к выводу, что наибольшее значение $1$ функция принимает в точках $0,\ \dfrac{\pi}{2}$, а наименьшее значение $1/\sqrt{2}$ — в точке $\dfrac{\pi}{4}$.

2) Среди прямоугольников заданной площади $S$ найдем прямоугольник наименьшего периметра.

Если $x,\ y$ — длины сторон прямоугольника, то $xy=S$, $p=x+y$ —полупериметр. Заметив, что $y=\dfrac{S}{x}$, получаем представление полупериметра в виде функции $p=x+\dfrac{S}{x},\ x\in(0,\ +\infty)$

Производная $p'=1-\dfrac{S}{x^2}$ отрицательна на $(0,\ \sqrt{S})$ и положительна на $(\sqrt{S},\ +\infty)$, функция убывает на $(0,\ \sqrt{S})$ и возрастает на $(\sqrt{S},\ +\infty)$; в точке $\sqrt{S}$ достигается наименьшее значение. Наименьшим периметром обладает квадрат.