Лекция 2 06.09.2024

§ 4 Вещественные числа

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

I. На множестве вещественных чисел определена операция сложения

1) Коммутативность

2) Ассоциативность

3) Существование нейтрального элемента (0)

4) существование противоположного элемента

Следствия

1) Единственность нуля

2) единственность противоположного элемента

3) Операция вычитания

II. На множестве вещественных чисел определена операция умножения

1) Коммутативность

2) Ассоциативность

3) Существование нейтрального элемента $(1 \neq 0)$

4) существование обратного элемента

III. Дистрибутивность

$$(x+y)z = xz + yz$$

Следствия

1) $0 \cdot x = 0$

$$x \cdot 0 = x \cdot (0+0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \Rightarrow 0 = x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (-x \cdot 0) = x \cdot 0$$

2) $(-1)x = -x$

3) $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

4) $(-x)y = -xy,\ (-x)(-y) = xy$

IV. На множестве вещественных чисел определено отношение порядка $\leq$

Порядком называется отношение с тремя свойствами

$x \leq x$

$x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$

$x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Отношение порядка на $\mathbb{R}$ является линейным порядком:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \vee y \leq x$$

V. Связь арифметических операций и порядка

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$
$$x,\ y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$$

Следствие $x, y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$.

VI. Аксиома полноты

Пусть X, Y — непустые множества вещественных чисел, причем

$$\forall x \in X \ \ \forall y \in Y \quad x \leq y\,.$$

Тогда $$\exists c \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in X \ \ \forall y \in Y \quad x \leq c \leq y$$

Определение

X —непустое множество вещественных чисел.

Число M называется верхней границей множества X, если

$$\forall x \in X \quad x \leq M\,.$$

Число m называется нижней границей множества X, если

$$\forall x \in X \quad x \geq m\,.$$

Множество, имеющее верхнюю границу, называется ограниченным сверху.

Множество, имеющее нижнюю границу, называется ограниченным снизу.

Множество, ограниченное сверху и снизу, называется ограниченным.

Теорема 1. Существование граней

1) Пусть множество E ограничено сверху.

Тогда среди верхних границ множества E существует наименьшая

2) Пусть множество E ограничено снизу.

Тогда среди нижних границ множества E существует наибольшая

Доказательство

Пусть $E^s \neq \varnothing$ — множество верхних границ множества E . Ясно, что

$$\forall x \in E \ \forall y \in E^s \quad x \leq y .$$

По аксиоме полноты

$$\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in E \ \forall y \in E^s \quad x \leq M \leq y .$$

Неравенство $x \leq M$ означает, что M — верхняя граница множества E, а неравенство $M \leq y$ означает, что E — наименьшая верхняя граница

Определение.

1) Пусть E — ограниченное сверху множество вещественных чисел. Наименьшая верхняя граница множества E называется точной верхней границей, верхней гранью и обозначается

$$\sup E = \sup_{x \in E} x$$

2) Пусть E — ограниченное снизу множество вещественных чисел. Наибольшая нижняя граница множества E называется точной нижней границей, нижней гранью и обозначается

$$\inf E = \inf_{x \in E} x$$

Теорема 2. Описание граней на ε-языке.

1) $M = \sup E \ \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall x \in E \ \ x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ \ x > M - \varepsilon \end{matrix}$

2) $m = \inf E \ \Leftrightarrow \begin{matrix} \forall x \in E \ \ x \geq m \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ \ x < m + \varepsilon \end{matrix}$

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Предложение

1) Если $A \subset B$, B ограничено сверху, то A ограничено сверху и

$$\sup A \leq \sup B .$$

2) $\sup(A + x) = \sup A + x$.

3) Если $\lambda > 0$, то $\sup \lambda A = \lambda \sup A$; $\sup(-A) = -\inf A$.

Пример. $\sup(0, 1) = 1$

Если $z = \sup E \in E$, то $z = \max E$ — наибольший элемент множества E .

Если $z = \max E$, то $z = \sup E$

§ 5 Промежутки

К промежуткам относят множества вещественных чисел следующих типов

$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ —отрезок (здесь $a \le b$)

$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ —интервал (здесь $a < b$)

$[a, b) = \{x \mid a \le x < b\}$ (здесь $a < b$)

$(a, b] = \{x \mid a < x \le b\}$ (здесь $a < b$)

$[a, +\infty) = \{x \mid x \ge a\}$

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$

$(-\infty, b] = \{x \mid x \le b\}$

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Промежуток Δ характеризуется тем свойством, что

$$\forall x, y \in \Delta \quad x < z < y \Rightarrow z \in \Delta .$$

§ 6 Абсолютная величина (модуль) вещественного числа

1⁰. Определение.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Основные свойства

1) $|x| = \max\{x, -x\}$,

2) $|x| \geq 0, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

3) $|-x| = |x|$,

4) $|xy| = |x||y|$,

5) $-|x| \leq x \leq |x|$,

Доказательство.

$|x| = \max\{x, -x\}$,

$|x| \geq x$,

$|x| \geq -x, \; -|x| \leq x$

6) $a > 0 \qquad |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$,

Доказательство.

$$|x| = \max\{x, -x\} \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \\ -x \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases}$$

7) $|x + y| \leq |x| + |y|$,

Доказательство.

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$
$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$$
$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

8) $|x \pm y| \geq \big||x| - |y|\big|$

Доказательство.

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|,$$
$$|x| - |y| \leq |x - y|$$

Аналогично,

$|y| - |x| \leq |x - y|$.

$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

Предложение

Множество $E \subset \mathbb{R}$ Ограничено в том и только в том случае, если

$$\exists M \ \ \forall x \in E \ |x| \le M \ .$$

Действительно, ограниченность по определению означает, что

$$\exists m, M \ \ \forall x \in E \ \ m \le x \le M \ .$$

Предположив ограниченность множества E, положим $M_1 = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда

$$\forall x \in E \ \ x \le M \le |M| \le M_1;$$
$$x \ge m, \ -x \le -m \le |m| \le M_1.$$

Поэтому $\forall x \in E \ |x| \le M_1$.

Наоборот, если $\forall x \in E \ |x| \le M$, то $\forall x \in E \quad -M \le x \le M$.

§ 7. Геометрическая интерпретация

Множество $\mathbb{R}$ изображается направленной прямой (осью) с отмеченными точками $0, \ 1$.