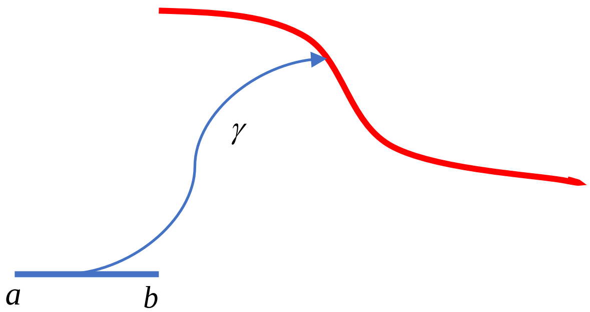
Глава III Криволинейные интегралы

§ 1. Путь и кривая

Непрерывное отображение $\gamma:[a,\, b]\to\mathbb{R}^n$ называется путем в $\mathbb{R}^n$. Если отображение γ m раз непрерывно дифференцируемо, говорят, что γ — путь класса C^m. Если γ' ни в одной точке не обращается в нуль, путь называется гладким. Вектор $\vec{a}=\gamma'(t)$ — касательный вектор пути.



Пути γ и $\tilde{\gamma}=\gamma\circ\lambda$, где λ и λ^{-1} строго возрастают и непрерывно дифференцируемы, называются эквивалентными. Путь $\gamma_-:[a,\, b]\to\mathbb{R}^n$, $\gamma_-(\tau)=\gamma(a+b-\tau)$ называется встречным. Совокупность эквивалентных путей называется кривой.
Впрочем, иногда кривой называют просто носитель пути.

Гладкий путь спрямляем, его длина вычисляется по формуле $L=\int\limits_a^b\|\gamma'(t)\|dt$. В качестве параметра на гладком пути можно использовать переменную длину дуги $s=l(t)=\int\limits_a^t\|\gamma'(\tau)\|d\tau$. Параметризацию длиной дуги называют естественной. В естественной параметризации $\|\dot{\gamma}(s)\|=1$

§ 2. Криволинейный интеграл первого рода

1

1^0. Определение

Пусть f — непрерывная функция, определенная по крайней мере на носителе пути γ класса C^1.

Число

$$I=\int\limits_\gamma f\,dl=\int\limits_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt \tag{1}$$

называется криволинейным интегралом I рода.
В случае естественной параметризации формула (1) принимает вид

$$\int\limits_\gamma f\,dl=\int\limits_0^L f(\gamma(s))ds \tag{2}$$

2^0. Независимость интеграла от параметризации и ориентации

Если $\gamma\sim\tilde{\gamma}$, то

$$\int\limits_\gamma f\,dl=\int\limits_{\tilde{\gamma}} f\,dl\,. \tag{4}$$

Действительно,

$$\int_{\gamma} f\,dl = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = [t=\lambda(\tau)] = \int_{\tilde a}^{\tilde b} f(\gamma(\lambda(\tau)))\|\gamma'(\lambda(\tau))\|\lambda'(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{\tilde a}^{\tilde b} f(\tilde\gamma(\tau))\|\tilde\gamma'(\tau)\|d\tau = \int_{\tilde\gamma} f\,dl$$

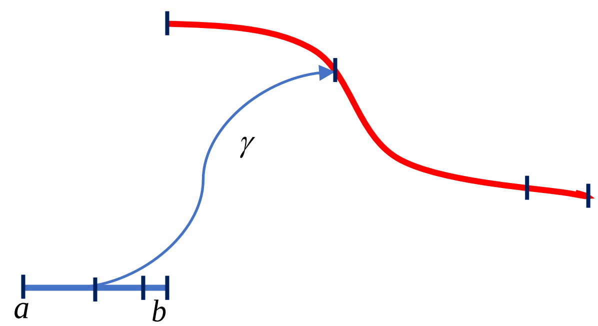
Интеграл I рода не меняет своего значения при переходе к встречному пути:

$$\int_{\gamma} f\,dl = \int_{\gamma_-} f\,dl\,. \tag{5}$$

$$\int_{\gamma} f\,dl = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt = [t=a+b-\tau] = \int_a^b f(\gamma(a+b-\tau))\|\gamma'(a+b-\tau)\|d\tau =$$

$$= \int_{\tilde a}^{\tilde b} f(\gamma_-(\tau))\|\gamma_-'(\tau)\|d\tau = \int_{\gamma_-} f\,dl$$

Если γ — простой (γ — инъекция) гладкий путь, то любая простая гладкая параметризация носителя Γ пути γ даст одно и то же значения интеграла. Поэтому можно говорить об интеграле $\int_{\Gamma} fdl$ по носителю Γ пути γ.



3⁰ Криволинейный интеграл I рода — предел совокупности интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^{m} f(\gamma(\xi_k))\Delta l_k\text{, где } \Delta l_k \text{ — длина } k\text{-го участка пути.}$$

4^0. **Основные свойства**

1) $\int_{\gamma} dl$ — длина пути.—

2) **Линейность**

$$\int_{\gamma}(\alpha f+\beta g)\,dl = \alpha\int_{\gamma} fdl + \beta\int_{\gamma} gdl\,. \tag{6}$$

3) **Аддитивность**

Если путь γ составлен из путей γ_1 и γ_2, то

$$\int_{\gamma} fdl = \int_{\gamma_1} fdl + \int_{\gamma_2} fdl\,. \tag{7}$$

С учетом свойства аддитивности определение криволинейного интеграла распространяется на кусочно-гладкие пути (составленные из гладких).

4) **Монотонность.**

Если $f \le g$, то

$$\int_{\gamma} fdl \le \int_{\gamma} gdl\,. \tag{8}$$

Монотонность влечет за собой известные оценки и теорему о среднем.

5^0. **Физический смысл.**

Если $f \ge 0$ — плотность материальной кривой, то $\int\limits_{\gamma} fdl$ — масса.

6⁰. Криволинейный интеграл первого рода в трехмерном пространстве и на плоскости.
Если путь γ определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \qquad t \in [a,\, b],$$

то $\int\limits_{\gamma} fdl = \int\limits_{a}^{b} f\left(\varphi(t),\, \psi(t),\, \chi(t)\right)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\,dt$.

Для пути

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad t \in [a,\, b],$$

на плоскости $\int\limits_{\gamma} fdl = \int\limits_{a}^{b} f\left(\varphi(t),\, \psi(t)\right)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,dt$.

Если интегрирование ведется по графику Γ непрерывной функции ψ, то

$$\int\limits_{\Gamma} fdl = \int\limits_{a}^{b} f\left(x,\, \psi(x)\right)\sqrt{1 + \psi'^2(x)}\,dx.$$

§ 3. Криволинейный интеграл второго рода

В записи определенного интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ подынтегрального выражения символ dx можно трактовать как линейную функцию (линейную форму) $dx(h) = h$. Соответственно $f(x)dx$ есть "дифференциальная форма", каждому x ставится в соответствие линейная форма $f(x)dx(h) = f(x)h$.

При интегрировании отрезок разбивается на части, на каждом участке вычисляем значение формы, элементы суммируем, переходим к пределу. В формуле замены переменной $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt$ можно видеть операцию переноса формы на промежуток $[\alpha,\, \beta]$. При этом для убывающих функций φ в одном из интегралов верхний предел меньше нижнего. Дифференциальную форму интегрируют по ориентированному множеству.
Язык дифференциальных форм удобен для введения операции интегрирования на путях многомерного пространства.

1⁰. Линейные дифференциальные формы (первой степени)

Вещественная функция L на n-мерном пространстве называется линейной формой, если

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v).$$

Линейные формы на n-мерном пространстве образуют n-мерное пространство, базис которого образуют проекторы

$$dx^1,\dots,dx^n : dx^i\left(h\right)=h^i \text{ для } h=\left(h^1,\dots,h^n\right).$$

Целесообразность использования обозначения dx^i скоро станет понятной.
Всякая линейная форма единственным образом представляется линейной комбинацией базисных форм:

$$L=\sum_{i=1}^{n} L_i dx^i = L_i dx^i .$$

(В последнем варианте принимается соглашение Эйнштейна о суммировании по нижнему и верхнему индексу).
Определение. Дифференциальной формой (первой степени) ω в области $G\subset\mathbb{R}^n$ называется отображение области G в пространство линейных форм. ω — это правило, которое каждой точке $x\in G$ ставит в соответствие линейную форму $\omega\left(x\right)$.

Дифференциальную форму ω в области $G\subset\mathbb{R}^n$ можно записать в виде

$$\omega=P_1dx^1+\dots+P_ndx^n=\sum_{i=1}^{n} P_i dx^i = P_i dx^i \text{, где } P_1,\dots P_n \text{ — функции в } G .$$

Функции $P_i,\dots,P_n$ будем предполагать достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми.
Часто говорят, что дифференциальная форма — это просто выражение P_idx^i.
В $\mathbb{R}^3$ дифференциальная форма имеет вид $\omega=Pdx+Qdy+Rdz$, в $\mathbb{R}^2$ — $Pdx+Qdy$.
Примеры.
1) F — непрерывно дифференцируемая функция, дифференциал $dF=\dfrac{\partial F}{\partial x^1}dx^1+\dots+\dfrac{\partial F}{\partial x^n}dx^n$ — дифференциальная форма. Дифференциал dF является линейной функцией (линейной формой), действующей по формуле $dF\left(h\right)=\dfrac{\partial F}{\partial x_1}h^1+\dots+\dfrac{\partial F}{\partial x_n}h^n$. Каждой точке $x\in G$ поставлена в соответствие линейная форма.
(Если под x^i понимать i-ю координату точки в n-мерном пространстве, то эта функция имеет форму dx^i своим дифференциалом).
2) Векторному полю $\vec{f}=f_1\vec{e}_1+\dots+f_n\vec{e}_n$ отвечает дифференциальная форма $\omega=f_1dx^1+\dots+f_ndx^n$.

2^0. Интеграл от дифференциальной формы (криволинейный интеграл II рода)

Если $\omega=P\left(x\right)dx$ — дифференциальная форма на прямой, то

$$\int_a^b\omega=\int_a^b P\left(x\right)dx$$

Вспоминая определение интеграла Римана в терминах интегральных сумм, можем написать

$$\int_a^b\omega=\lim_{\lambda_\tau\to 0}\sum_{k=1}^{m}\omega\left(\xi_k\right)\left(\Delta x_k\right)$$

.

Если ω — дифференциальная форма в области $G\subset\mathbb{R}^n$, а $\gamma:\left[a,\,b\right]\to G$ — путь класса C^1 в области G, то перенесем дифференциальную форму на отрезок и проинтегрируем перенесенную форму.

На отрезке рассматриваем форму $\omega^*: \omega^*(t)(h) = \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)h)$. Обозначим через $\varphi^1,\dots,\varphi^n$ координатные функции пути γ.Для формы ω^* можно написать выражение

$$\omega^*(t)(h) = \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)h) = \left(P_1(\gamma(t))(\varphi^1)'(t) + \dots + P_n(\gamma(t))(\varphi^n)'(t) \right) h,$$

$$\omega^*(t) = \left(P_1(\gamma(t))(\varphi^1)'(t) + \dots + P_n(\gamma(t))(\varphi^n)'(t) \right) dt.$$

Выражение ω^* получается из выражения для ω заменой dx^i на дифференциалы функций $x^i = \varphi^i(t)$.

Теперь полагаем по определению

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma P_1(x)dx^1 + \dots + P_n(x)dx^n = \int_a^b \omega^* = \int_a^b \left(P_1(\gamma(t))(\varphi^1)'(t) + \dots + P_n(\gamma(t))(\varphi^n)'(t) \right) dt. \quad (1)$$

Формулу (1) можно записать в виде

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))dt.$$

Для дифференциальной формы $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ в $\mathbb{R}^3$ и пути

$$\gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

получается формула

$$\begin{aligned} &\int_\gamma \omega = \int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz = \\ &= \int_a^b \left(P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (2)$$

В $\mathbb{R}^2$ формула (2) превращается в

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma Pdx + Qdy = \int_a^b \left(P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \right) dt. \quad (3)$$

Для интеграла по графику $\Gamma: y = \psi(x)$ и горизонтальному отрезку $y = y_0$ с направлением движения слева направо имеем соответственно формулы

$$\begin{aligned} &\Gamma: y = \psi(x), \quad \int_\Gamma Pdx = \int_a^b P(x, \psi(x))dx, \int_\Gamma Qdy = \int_a^b Q(x, \psi(x))\psi'(x)dx; \\ &\Gamma: y = y_0, \quad \int_\Gamma Pdx = \int_a^b P(x, y_0)dx, \int_\Gamma Qdy = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Интеграл от дифференциальной формы можно представить пределом интегральных сумм

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{k=1}^m \omega(\xi_k)(\Delta x_k), \text{ здесь } \Delta x_k = \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}).$$

3⁰. Интегралы по эквивалентным путям равны. Если $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, то

$$\int_\gamma \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega. \quad (5)$$

Действительно,

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{a}^{b}\omega\left(\gamma(t)\right)\left(\gamma'(t)\right)dt=\int\limits_{\tilde a}^{\tilde b}\omega\left(\gamma\left(\lambda(\tau)\right)\right)\left(\gamma'\left(\lambda(\tau)\right)\right)\lambda'(\tau)\,d\tau=\int\limits_{\tilde a}^{\tilde b}\omega\left(\tilde\gamma(\tau)\right)\left(\tilde\gamma'(\tau)\right)d\tau=\int\limits_{\tilde\gamma}\omega .$$

Криволинейный интеграл II рода меняет свое значение на противоположное при смене ориентации, при изменении направления движения:

$$\int\limits_{\gamma_-}\omega=-\int\limits_{\gamma}\omega \tag{6}$$

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{a}^{b}\omega\left(\gamma(t)\right)\left(\gamma'(t)\right)dt=\int\limits_{a}^{b}\omega\left(\gamma(a+b-\tau)\right)\left(\gamma'(a+b-\tau)\right)d\tau=-\int\limits_{a}^{b}\omega\left(\gamma_-(\tau)\right)\left(\gamma'_-(\tau)\right)d\tau=-\int\limits_{\gamma_-}\omega .$$

4^0. Криволинейный интеграл II рода обладает свойствами линейности и аддитивности:

$$\int\limits_{\gamma}\left(\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2\right)=\alpha_1\int\limits_{\gamma}\omega_1+\alpha_2\int\limits_{\gamma}\omega_2 , \tag{7}$$

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{\gamma_1}\omega+\int\limits_{\gamma_2}\omega , \tag{8}$$

если путь γ получен соединением путей γ_1 и γ_2.

5^0. Связь криволинейных интегралов I и II рода.

Пусть $\omega=Pdx+Qdy+Rdz$ — дифференциальная форма,

$$\gamma:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\chi(t)\end{cases} —$$

путь. Вектор $\gamma'(t)\left(\varphi'(t),\,\psi'(t),\,\chi'(t)\right)$ — касательный вектор пути, $\dfrac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$ — единичный касательный вектор, его координаты $\left(\cos\lambda,\,\cos\mu,\,\cos\nu\right)$ — направляющие косинусы касательного вектора. Теперь

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{\gamma}\left(P\cos\lambda+Q\cos\mu+\cos\nu\right)dl . \tag{9}$$

Действительно,

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{a}^{b}\left(P\varphi'+Q\psi'+R\chi'\right)dt=\int\limits_{a}^{b}\left(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu\right)\sqrt{\varphi'+\psi'+\chi'}\,dt=$$

$$=\int\limits_{\gamma}\left(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu\right)dl.$$

Наоборот,

$$\int\limits_{\gamma}f\;\,dl=\int\limits_{\gamma}f\left(\cos\lambda dx+\cos\mu dy+\cos\nu dz\right) . \tag{10}$$

Дифференциальная форма $\cos\lambda dx+\cos\mu dy+\cos\nu dz$ называется дифференциальной формой длины дуги. Форма длины зависит от ориентации; меняя ориентацию мы должны заменить и форму на противоположную.

6^0. Физический смысл интеграла II рода. Сила $\vec F$ на перемещении $\Delta\vec r$ выполняет работу $\left(\vec F,\,\Delta\vec r\right)$. Вдоль пути γ сила $\vec F$ выполняет работу

$$\int_\gamma \left(\vec{F},\, d\vec{r}\right) = \int_\gamma F_x dx + F_y dy + F_z dz\,.$$

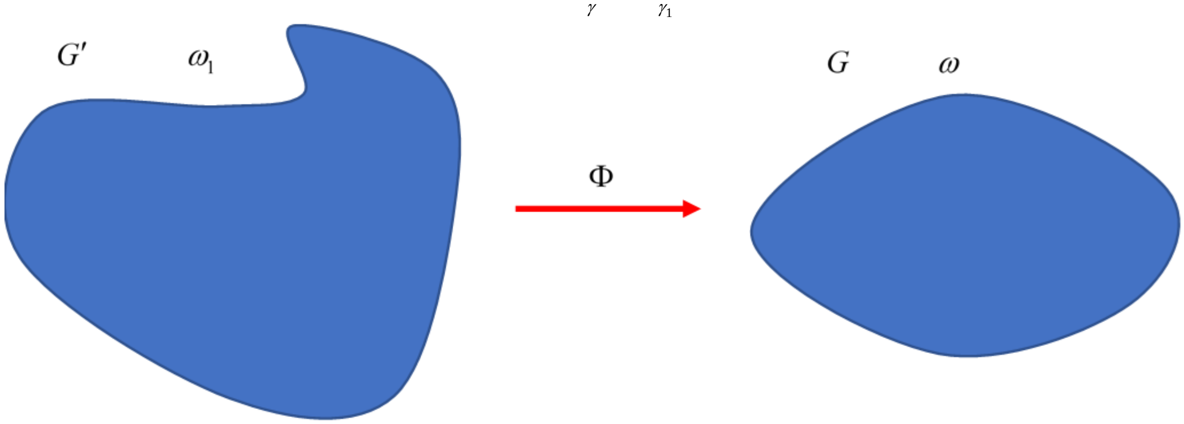
7⁰. Перенос линейных дифференциальных форм.

$\Phi : G' \to G$ — непрерывно дифференцируемое отображение, ω — дифференциальная форма в области G. Определим дифференциальную форму $\omega_1 = \Phi^* \omega$ в области G':

$$\omega_1(u)(\Delta u) = \omega\left(\Phi(u)\right)\left(d\Phi(u, \Delta u)\right)$$

Если γ_1 — путь в области G', $\gamma = \Phi \circ \gamma_1$ — соответствующий путь в области G. Тогда

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega_1\,.$$



Вычисления проведем сначала в трехмерном пространстве. Пусть

$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ — дифференциальная форма,

$$\Phi : \begin{cases} x = f(u, v, w), \\ y = g(u, v, w), \\ z = h(u, v, w) \end{cases}$$ — координатная запись отображения Φ.

Для $\Delta u(\xi, \eta, \zeta)$ имеем

$$d\Phi(\Delta u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}\xi + \dfrac{\partial f}{\partial v}\eta + \dfrac{\partial f}{\partial w}\zeta \\ \dfrac{\partial g}{\partial u}\xi + \dfrac{\partial g}{\partial v}\eta + \dfrac{\partial g}{\partial w}\zeta \\ \dfrac{\partial h}{\partial u}\xi + \dfrac{\partial h}{\partial v}\eta + \dfrac{\partial h}{\partial w}\zeta \end{pmatrix},$$ так что

$$\omega_1(\Delta u) = P \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u}\xi + \frac{\partial f}{\partial v}\eta + \frac{\partial f}{\partial w}\zeta\right) + Q \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u}\xi + \frac{\partial g}{\partial v}\eta + \frac{\partial g}{\partial w}\zeta\right) + R \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial u}\xi + \frac{\partial h}{\partial v}\eta + \frac{\partial h}{\partial w}\zeta\right) =$$

$$= \left(P\frac{\partial f}{\partial u} + Q\frac{\partial g}{\partial u} + R\frac{\partial h}{\partial u}\right)\xi + \left(P\frac{\partial f}{\partial v} + Q\frac{\partial g}{\partial v} + R\frac{\partial h}{\partial v}\right)\eta + \left(P\frac{\partial f}{\partial w} + Q\frac{\partial g}{\partial w} + R\frac{\partial h}{\partial w}\right)\zeta,$$

$$\omega_1 = \left(P\frac{\partial f}{\partial u} + Q\frac{\partial g}{\partial u} + R\frac{\partial h}{\partial u}\right)du + \left(P\frac{\partial f}{\partial v} + Q\frac{\partial g}{\partial v} + R\frac{\partial h}{\partial v}\right)dv + \left(P\frac{\partial f}{\partial w} + Q\frac{\partial g}{\partial w} + R\frac{\partial h}{\partial w}\right)dw =$$

$= P_1 du + Q_1 dv + R_1 dw$, где

$$P_1 = P\frac{\partial f}{\partial u} + Q\frac{\partial g}{\partial u} + R\frac{\partial h}{\partial u},\ Q_1 = P\frac{\partial f}{\partial v} + Q\frac{\partial g}{\partial v} + R\frac{\partial h}{\partial v},\ R_1 = P\frac{\partial f}{\partial w} + Q\frac{\partial g}{\partial w} + R\frac{\partial h}{\partial w}.$$

Видим, что форма ω_1 получается заменой в выражении для ω символов dx, dy, dz дифференциалами функций f, g, h.

Для интегралов получаем

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(P\varphi' + Q\psi' + R\chi'\right)dt =$$

$$= \int_a^b \left(P\left(\frac{\partial f}{\partial u}\varphi_1' + \frac{\partial f}{\partial v}\psi_1' + \frac{\partial f}{\partial w}\chi_1' \right) + Q\left(\frac{\partial g}{\partial u}\varphi_1' + \frac{\partial g}{\partial v}\psi_1' + \frac{\partial g}{\partial w}\chi_1' \right) + R\left(\frac{\partial h}{\partial u}\varphi_1' + \frac{\partial h}{\partial v}\psi_1' + \frac{\partial h}{\partial w}\chi_1' \right) \right)dt =$$

$$= \int_a^b \left(P_1\varphi_1' + Q_1\psi_1' + R_1\chi_1'\right)dt = \int_{\gamma_1} \omega_1$$

Проведенные вычисления можно повторить для произвольных размерностей.

Пусть Φ — отображение с координатными функциями $f^1, \dots, f^n$, $\omega = P_i dx^i$ — дифференциальная форма в области G. Определим в области G' дифференциальную форму $\tilde{\omega}$, полагая $\tilde{\omega}(\eta) = \omega\left(d\Phi(\eta)\right)$.

Тогда $\tilde{\omega}(\eta) = \omega\left(d\Phi(\eta)\right) = P_i \dfrac{\partial f^i}{\partial u^j}\eta^j$. Полагая $\tilde{P}_j = P_i \dfrac{\partial f^i}{\partial u^j}$, получаем $\tilde{\omega} = \tilde{P}_j du^j$.

Форма $\tilde{\omega}$ получается из $\omega = P_i dx^i$ заменой dx^i на дифференциалы $\dfrac{\partial f^i}{\partial u^j} du^j$ координатных функций отображения Φ.

Теперь

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b P_i\left(\gamma(t)\right)\left(\gamma^i\right)'(t)\,dt = \int_a^b P_i\left(\gamma(t)\right)\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\left(\gamma_1(t)\right)\left(\gamma_1^j\right)'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \tilde{P}_j\left(\gamma_1(t)\right)\left(\gamma_1^j\right)'(t)\,dt = \int_{\gamma_1} \tilde{\omega}.$$