Лекция 1 02.09.2025 (3 часа)

Глава III. Функциональные последовательности и ряды

§ 1. Основные понятия

Определение. Пусть каждому натуральному n поставлена в соответствие функция f_n, определенная на множестве E. Тогда говорят, что определена функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве E.

Функциональная последовательность есть отображение множества натуральных чисел в множество функций, определенных на E.

Каждому $x \in E$ соответствует числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$. Если эта числовая последовательность сходится, то говорят, что функциональная последовательность сходится в точке x. Если сходимость имеет место для всех точек некоторого множества D, говорят что функциональная последовательность сходится (поточечно сходится) на D.

Положим $E_0 = \{x : \{f_n\} \text{ сходится в точке } x\}$ и определим функцию f соотношением $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для $x \in E_0$. Множество E_0 называется множеством сходимости, а f — предельной функцией функциональной последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n,\ f_n \underset{n\to\infty}{\to} f.$$

Пример. Функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенная на $\mathbb{R}$ соотношением $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ для $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ имеет предельную функцию $f : f(x) = e^x$.

Обобщение. Семейство функций

Функцию f двух переменных на $E \times \mathrm{A}$ обозначают через $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ и называют *семейством функций*, зависящих от параметра $\alpha \in \mathrm{A}$, если по тем или иным причинам переменная $\alpha \in \mathrm{A}$ выделяется своей особой ролью. Эту переменную называют параметром.

Определение. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность на множестве E. Построим последовательность частичных сумм

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty},\ S_n = f_1 + \cdots + f_n.$$

Последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ на множестве E, при этом последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называются последовательностью членов и последовательностью частичных сумм функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$. Множество сходимости функциональной последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется множеством сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, а предельная функция $S=\lim_{n\to\infty} S_n$ — суммой функционального ряда:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} f_n .$$

Каждому $x\in E$ соответствует числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Для x из множества сходимости

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Примеры.

I. 1) $f_n(x)=x^n,\ x\in[0,1]$;

$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ 1, & x=1.\end{cases}$

2) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx},\ x\in[0,+\infty)$;

$f(x)=\begin{cases}0, & x\in(0,+\infty),\\ 1, & x=0.\end{cases}$

3) $f_n(x)=e^{-n^2x^2},\ x\in(-\infty,+\infty)$;

$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

4) $f_n(x)=\dfrac{1}{n^2+x^2}\underset{n\to\infty}{\to} 0$.

II. 1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\dfrac{x}{1-x},\ x\in(-1,1)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$ сходится при всех $x\in(-\infty,+\infty)$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ абсолютно сходится при всех $x\in(-\infty,+\infty)$.

Примеры показывают, что предельная функция последовательности непрерывных функций может уже не быть непрерывной.

Функциональная последовательность $f_n(x)=nx^n\underset{n\to\infty}{\to} 0$ на $[0,1)$, но

$\int_0^1 f_n(x)\,dx=\int_0^1 nx^n\,dx=\dfrac{n}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to} 1$. Предельный переход под знаком интеграла оказался невозможным.

Отмеченные неприятности приводят к необходимости более детального рассмотрения вопроса о сходимости функциональных последовательностей и рядов.

§2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и функциональных рядов

1° Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность, а f — функция на множестве E. Поточечная сходимость $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ на E означает:

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon .$$

Здесь номер N зависит от x и ε. Если можно найти номер N, не зависящий от x, говорят что сходимость является равномерной.

Определение. Говорят, что функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к f на множестве E и пишут $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall x \in E\ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon .$$

Теорема 1. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность, а f — функция на множестве E.
Положим $\rho_n = \sup\limits_{x\in E}\left|f_n(x) - f(x)\right|$.

Тогда для равномерной сходимости $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ к f на множестве E необходимо и достаточно условие

$$\rho_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости $\exists N\ \forall n > N\ \forall x \in E\ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$. Переходя в последнем неравенстве к верхней грани, получим $\rho_n = \sup\limits_{x\in E}\left|f_n(x) - f(x)\right| \le \varepsilon$. Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \rho_n \le \varepsilon$, т.е. $\rho_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Достаточность. Пусть теперь $\rho_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \rho_n < \varepsilon$, так что $\forall x \in E\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \le \rho_n < \varepsilon$. Последнее означает, что $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$.

Дополнение к теореме 1. Если $\forall x \in E\ \left|f_n(x) - f(x)\right| \le \alpha_n$, а $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на E.

Примеры.

1) $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x \in (-\infty;\ +\infty)$. $\forall x\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Функциональная последовательность поточечно сходится к нулевой функции. Однако $\rho_n = \sup\limits_{x\in(-\infty;\ +\infty)}\left|\dfrac{x}{n}\right| = +\infty$, ρ_n не является бесконечно малой, сходимость неравномерная.
Если ту же функциональную последовательность рассматривать на отрезке $[-A;\ A]$, где $A > 0$, то $\rho_n = \sup\limits_{x\in[-A;\ A]}\left|\dfrac{x}{n}\right| = \dfrac{A}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, так что $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \mathbf{0}$ на $[-A;\ A]$.

2) $f_n\left(x\right)=\dfrac{1}{x+n}$, $x\in\left[0;\,+\infty\right)$.

При любом $x\in\left[0;\,+\infty\right)$ $f_n\left(x\right)\underset{n\to\infty}{\to}0$. Поскольку $0\le f_n\left(x\right)\le\dfrac{1}{n}\to 0$, то $f_n\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}\mathbf{0}$ на $\left[0;\,+\infty\right)$.

3) $f_n\left(x\right)=x^n$, $x\in\left[0;\,1\right)$. Здесь опять $\forall x$ $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}0$, $\rho_n=\sup\limits_{x\in[0;\,1)}x^n=1$. Сходимость не является равномерной. На промежутках вида $\left[0;\,1-\varepsilon\right]$, где $0<\varepsilon<1$, сходимость окажется равномерной: $\rho_n=\sup\limits_{x\in[0;\,1-\varepsilon]}x^n=\left(1-\varepsilon\right)^n\to 0$.

4) $f_n\left(x\right)=x^n-x^{n+1}$, $x\in\left[0;\,1\right]$. Функция f_n на промежутке $\left[0;\,1\right]$ положительна и принимает наибольшее значение в точке $x_0=\dfrac{n}{n+1}$. $\rho_n=f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n\dfrac{1}{n+1}\le\dfrac{1}{n+1}\to 0.$

Функциональная последовательность $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к нулевой функции на отрезке $\left[0;\,1\right]$.

***Теорема 2*. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности**.

Для равномерной сходимости функциональной последовательности $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве E необходимо и достаточно условие Коши:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n>N\ \forall x\in E\ \left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость устанавливается стандартными рассуждениями. Пусть $f_n\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}f$ на E. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. По определению равномерной сходимости

$$\exists N\ \forall n>N\ \ \forall x\in E\ \left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь получается, что

$$\forall n,m>N\ \ \ \forall x\in E\ \left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|\le\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|+\left|f_m\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

выполнено условие Коши.

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши для функциональной последовательности. Тогда при любом $x\in E$ числовая последовательность $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию Коши, поэтому она сходится. Обозначим через f предельную функцию функциональной последовательности $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Покажем, что последовательность $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f равномерно. Для произвольного $\varepsilon>0$ по условию можно найти такой номер N ,что

$$\forall n,m>N\ \forall x\in E\ \left|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)\right|<\varepsilon.$$

В последнем неравенстве зафиксируем n и перейдем к пределу при $m\to\infty$. Получается, что

$$\forall n>N\ \forall x\in E\ \left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\le\varepsilon$$

Равномерная сходимость установлена.

2° **Определение**. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — функциональный ряд на множестве E. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ называется равномерно сходящимся на E, если равномерно сходится его последовательность частичных сумм $S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$.

Теорема 3. Необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда.

Если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на множестве E, то $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \mathbf{0}$ на E.

Доказательство теоремы 3 не вызывает трудностей и предоставляется слушателям.

Теорема 4. Пусть функциональный ряд $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ поточечно сходится на множестве E, $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — его сумма, а $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ $(n = 1, 2, \dots)$ — остатки.

Тогда для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ на множестве E необходима и достаточна равномерная сходимость последовательности остатков к нулевой функции:

$$r_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \mathbf{0} \text{ на } E.$$

Действительно, равномерная сходимость равносильна условию $S_n - S \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \mathbf{0}$, заметив, что $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k = S - S_n$, мы завершаем доказательство теоремы.

Теорема 5. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

Для равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ на множестве E необходимо и достаточно условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \ p = 1, 2, \dots\ \forall x \in E\ \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Примеры.

1) Геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ сходится при $x \in (-1; 1)$, имеет сумму $\frac{x}{1-x}$. Ряд не является равномерно сходящимся на интервале $(-1; 1)$, поскольку нарушено необходимое условие равномерной сходимости.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - x^{n+1}\right)$ сходится при всех $x \in [0; 1]$. Выполнено необходимое условие равномерной сходимости, но последовательность частичных сумм $S_n(x) = \left(x - x^2\right) + \left(x^2 - x^3\right) + \dots + \left(x^n - x^{n+1}\right) = x - x^{n+1}$, как мы видели, сходится неравномерно. Ряд не является равномерно сходящимся.

3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+n}$ при всех $x \in (0; +\infty)$ сходится условно, при этом

$\left| r_n(x) \right| \le \frac{1}{x+n+1} \le \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Ряд равномерно сходится.

4) Те же рассуждения показывают, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(x^n - x^{n+1}\right)$ равномерно сходится на отрезке $[0;\,1]$. Интересно отметить, что во всех точках ряд сходится абсолютно, но ряд из абсолютных величин не является равномерно сходящимся (см. пример 2).

§ 3. Признаки равномерной сходимости рядов

1⁰. Признак Вейерштрасса

Теорема 1

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ — функциональный ряд на E,

$$\forall x \in E,\ n = 1, 2, \ldots\ \left|f_n(x)\right| \le a_n, \tag{1}$$

числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Тогда функциональный ряд (1) равномерно сходится на E.

Доказательство. Произвольным образом зафиксируем $x \in E$. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ абсолютно сходится по теореме сравнения.

Если r_n — остаток функционального ряда, то на основании условия (1) можем написать

$$\forall x \in E\ \left|r_n(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Следовательно, $r_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \mathbf{0}$ на E, функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на E.

(Можно пользоваться критерием Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \ p = 1, 2, \ldots\ \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon$$

Поэтому

$$\forall x \in E\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|f_k(x)\right| < \varepsilon$$

и критерий Коши дает равномерную сходимость ряда).

Примеры и замечания.

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$, поскольку

$$\forall x \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots\ 0 \le \frac{1}{x^2+n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится.

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ равномерно сходятся на $\mathbb{R}$.

3) Признак Вейерштрасса — важнейшее средство исследования равномерной сходимости. Однако, признак Вейерштрасса может сработать лишь в ситуации, где ряд абсолютно сходится во всех точка, более того, равномерно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$.

В то же время, равномерно сходящийся ряд может сходиться условно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}/$$

4) Может случиться, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится абсолютно во всех точках и равномерно на E, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$ не является абсолютно сходящимся. Такая ситуация сложилась при рассмотрении ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(x^n-x^{n+1}\right)$ на отрезке $[0;1]$.

5) Наконец, можно построить равномерно сходящийся положительный ряд, не удовлетворяющий условиям признака Вейерштрасса.

2^0. Признак Лейбница

Теорема 2.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} g_n . \tag{2}$$

1) $\forall x\in E\ g_1(x)\ge g_2(x)\ge\cdots\ge 0$;

2) $g_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \mathbf{0}$ на E.

Тогда ряд (2) равномерно сходится на E.

Доказательство. При любом $x\in E$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} g_n(x)$ сходится по признаку Лейбница, остаток $r_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \mathbf{0}$, поскольку $\forall x\in E\ |r_n(x)|\le g_{n+1}(x)$.

Мы фактически пользовались признаком Лейбница в примерах 3), 4) предыдущего параграфа.

3^0. Признаки Дирихле и Абеля.

Здесь будут рассмотрены ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \text{ на множестве } E . \tag{3}$$

Теорема 3. Признак Дирихле

1) Положим $F_n=\sum_{k=1}^{n} f_k$ и предположим, что функциональная последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена, т.е.

$$\exists M\ \ \forall x\in E\ n=1,2,\dots\ |F_n(x)|\le M .$$

2) $\forall x\in E\ g_1(x)\ge g_2(x)\ge\cdots\ge 0$; $\quad g_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \mathbf{0}$.

Тогда ряд (3) равномерно сходится на E.

Теорема 4. Признак Абеля

1) Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на E.

2) $\forall x \in E$ последовательность $\{g_n(x)\}$ монотонна, функциональная последовательность $\{g_n\}$ равномерно ограничена:

$$\exists L \ \forall x \in E \ n = 1, 2, \ldots \ |g_n(x)| \le L$$

Тогда ряд (3) равномерно сходится на E.

Доказательство теорем 3, 4 проведем на основе критерия Коши. Для определенности считаем последовательность $\{g_n(x)\}$ убывающей.

Подвергнем сумму $\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x)$ преобразованию Абеля.

Положив $A_i = f_{n+1} + \cdots + f_{n+i}$ для $i = 1, 2, \ldots, p$ и $A_0 = 0$, можем написать

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) &= \sum_{i=1}^{p} f_{n+i}(x) g_{n+i}(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(A_i(x) - A_{i-1}(x)\right) g_{n+i}(x) = \\ &= A_p(x) g_{n+p}(x) + \sum_{i=1}^{p-1} A_i(x) \left(g_{n+i}(x) - g_{n+i+1}(x)\right)\end{aligned} \tag{4}$$

Пусть

$$\forall x \in E \ i = 0, 1, \ldots, p \ \ |A_i(x)| \le K \ \ |g_{n+i}(x)| \le L,$$

тогда (учитываем условие $g_{n+i}(x) - g_{n+i+1}(x) \ge 0$)

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x)\right| \le KL + K\sum_{i=1}^{p-1}\left(g_{n+i}(x) - g_{n+i+1}(x)\right) = KL + K\left(g_{n+1}(x) - g_{n+p}(x)\right) \le \\ &\le KL + 2KL = 3KL\end{aligned}$$

Пусть выполнены условия Дирихле. Поскольку $A_k = F_{n+k} - F_n$, то $\forall x \in E \, \forall i \ |A_i(x)| \le 2M$ и мы можем взять $K = 2M$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ в силу равномерной сходимости $g_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \mathbf{0}$ найдется такое N, что

$$\forall n > N \ \forall x \in E \ \ |g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6M}.$$

Мы берем $L = \frac{\varepsilon}{6M}$ и получаем неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x)\right| < \varepsilon,$$

ряд равномерно сходится.

Пусть теперь выполнены условия Абеля. Для произвольного $\varepsilon > 0$ в силу равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ найдется такое N, что

$$\forall n > N \ \forall x \in E \ i = 1, 2, \ldots, p \ |A_i(x)| \le \frac{\varepsilon}{3L}.$$

Мы берем $K=\dfrac{\varepsilon}{3L}$ и еще раз получаем неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\, g_k(x)\right|<\varepsilon\,,$$

ряд равномерно сходится.

Замечание. Роль f_n или g_n может выполнять числовая последовательность.

Пример. Пусть $a_n \underset{n\to\infty}{\searrow} 0$, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ равномерно сходятся на $[\varepsilon,\, 2\pi-\varepsilon]$.

Поскольку

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\,,\quad \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| \le \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\,,$$

то равномерная сходимость следует из признака Дирихле.

В частности, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ сходится на $(0,\, 2\pi)$, равномерно сходится на $[\varepsilon,\, 2\pi-\varepsilon]$, но не является равномерно сходящимся на $(0,\, 2\pi)$.

(Допустим, ряд равномерно сходится, тогда найдется такой номер n, что

$$\forall x\in(0,\, 2\pi)\ \left|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\cos kx}{k}\right| < \frac{1}{2}\,.$$

Переходя к пределу при $x\to+0$, получаем противоречие: $\dfrac{1}{2} < \sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{k} \le \dfrac{1}{2}$).

Упражнение. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ на равномерную сходимость.