Лекция 1 04.02.2025

Глава II. Определенный интеграл

§ 1. Понятие определенного интеграла

1^0. **Определение.** $[a, b]$ — отрезок. Набор точек $\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ называется разбиением отрезка $[a, b]$. $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$ — отрезки разбиения τ, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$ — длины этих отрезков. $\lambda_\tau = \max\limits_{k=1,\dots,n} \Delta x_k$ — ранг (мелкость) разбиения τ.

Определение. Пусть $\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ — разбиение. Набор точек $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, такой что $\xi_k \in \Delta_k$, называется выборкой из разбиения τ (набором, подчиненным разбиению τ).

2^0. **Определение.** Пусть f — ограниченная функция на отрезке $[a, b]$. Пусть $\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ — разбиение, $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ — выборка из разбиения τ. Сумма $\sigma(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ называется интегральной суммой функции f, построенной для разбиения τ и выборки ξ.

3^0. **Определение.** Число I называется определенным интегралом Римана функции f по отрезку $[a, b]$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \tau\, \forall \xi\ \left(\lambda_\tau < \delta \Rightarrow \left|\sigma(f, \tau, \xi) - I\right| < \varepsilon \right)$.

Естественно сказать, что $I = \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sigma(f, \tau, \xi)$.

Для определенного интеграла используется обозначение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

4^0. **Геометрический смысл определенного интеграла.** Для положительной функции интеграл — площадь подграфика.

§ 2. Суммы Дарбу

1^0. Определение

Пусть f — ограниченная функция на отрезке $[a, b]$,

$$\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \text{ — разбиение.}$$

Положим

$$m_k = \inf f([x_{k-1}, x_k]),\ M_k = \sup f([x_{k-1}, x_k])\ (k = 1, 2, \dots, n).$$

Сумма

$$s_\tau = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

называется нижней суммой Дарбу,

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \ —$$

верхней суммой Дарбу функции f.

2^0. Свойства сумм Дарбу

1) $s_\tau \le S_\tau$

2) Пусть τ — разбиение, а ξ — выборка. Тогда

$$s_\tau \le \sigma(f,\tau,\xi) \le S_\tau.$$

Верхняя сумма Дарбу является верхней гранью, нижняя сумма Дарбу — нижней гранью для всевозможных интегральных сумм, отвечающих данному разбиению:

$$s_\tau = \inf_\xi \sigma(f,\tau,\xi),\ S_\tau = \sup_\xi \sigma(f,\tau,\xi)$$

3) Разбиение τ_2 называется измельчением τ_1 (говорят, что τ_2 мельче τ_1), если τ_2 получается из τ_1 включением дополнительных точек.

Если τ_2 измельчение τ_1, то

$$s_{\tau_1} \le s_{\tau_2} \le S_{\tau_2} \le S_{\tau_1}.$$

Доказательство

Рассмотрим сначала простейший случай, где τ_2 получается из τ_1 добавлением одной точки:

$$\tau_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots x_{j-1} < x_j < \cdots < x_n = b,$$
$$\tau_2 : a = x_0 < x_1 < \cdots x_{j-1} < \overline{x} < x_j < \cdots < x_n = b,$$

Здесь

$$S_{\tau_2} - S_{\tau_1} = \widehat{M}\left(\overline{x} - x_{j-1}\right) + \breve{M}\left(x_j - \overline{x}\right) - M_j\left(x_j - x_{j-1}\right),$$

где

$$\widehat{M} = \sup f\left(\left[x_{j-1},\ \overline{x}\right]\right) \le \sup f\left(\left[x_{j-1},\ x_j\right]\right) = M_j,$$
$$\breve{M} = \sup f\left(\left[\overline{x},\ x_j\right]\right) \le \sup f\left(\left[x_{j-1},\ x_j\right]\right) = M_j,$$

так что

$$S_{\tau_2} - S_{\tau_1} \le M_j\left(\overline{x} - x_{j-1}\right) + M_j\left(x_j - \overline{x}\right) - M_j\left(x_j - x_{j-1}\right) = M_j\left(x_j - x_{j-1}\right) - M_j\left(x_j - x_{j-1}\right) = 0.$$

В общем случае добавление p точек можно провести за p рассмотренных элементарных шагов.

Уточнение

Если τ_2 получено из τ_1 включением p дополнительных точек, то

$$0 \le S_{\tau_1} - S_{\tau_2} \le (M - m)\,p\lambda_{\tau_1},\ s_{\tau_2} - s_{\tau_1} \le (M - m)\,p\lambda_{\tau_1}.$$

Здесь $m = \inf f\left([a,\ b]\right)$, $M = \sup f\left([a,\ b]\right)$.

Действительно, если добавлена одна точка, то

$$S_{\tau_1} - S_{\tau_2} \le M\left(x_j - x_{j-1}\right) - m\left(\overline{x} - x_{j-1}\right) - m\left(x_j - \overline{x}\right) = (M - m)\left(x_j - x_{j-1}\right) \le (M - m)\,\lambda_{\tau_1}.$$

Повторив операцию p раз, получим требуемое неравенство.

4) Для любых разбиений $\tau_1,\ \tau_2$ справедливо неравенство

$$s_{\tau_1} \le S_{\tau_2}.$$

Действительно, рассмотрим разбиение τ, включающее как точки разбиения τ_1, так и точки разбиения τ_2. τ — общее измельчение для разбиений τ_1 и τ_2, поэтому

$$s_{\tau_1} \le s_\tau \le S_\tau \le S_{\tau_2} .$$

§ 3. Лемма Дарбу

1⁰. Определение

Пусть f — ограниченная функция на отрезке $[a, b]$.

Число $I_* = \sup\limits_\tau s_\tau$ называется нижним интегралом Дарбу, а $I^* = \inf\limits_\tau S_\tau$ — верхним интегралом Дарбу.

Замечание. $m(b-a) \le I_* \le I^* \le M(b-a)$.

2⁰. Лемма.

$$I_* = \lim_{\lambda_\tau \to 0} s_\tau,\ I^* = \lim_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau,$$

т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \lambda_\tau < \delta \ \Rightarrow\ I^* \le S_\tau < I^* + \varepsilon .$$

Доказательство.
Пусть $\varepsilon > 0$. По определению верхнего интеграла найдется разбиение τ_0, для которого

$$I^* \le S_{\tau_0} < I^* + \frac{\varepsilon}{2} .$$

Обозначим через p число точек в разбиении τ_0.

Возьмем произвольное разбиение τ. Добавим точки разбиения τ_0, получим общее измельчение τ_1 разбиений τ_0, τ.

Поскольку τ_1 — измельчение τ_0, то $S_{\tau_1} \le S_{\tau_0}$, $I^* \le S_{\tau_1} < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$.

Поскольку τ_1 получено из τ добавлением не более p точек, то

$$S_\tau \le S_{\tau_1} + (M-m)p\lambda_\tau,\ S_\tau \le I^* + \frac{\varepsilon}{2} + (M-m)p\lambda_\tau .$$

Подберем $\delta > 0$ так, чтобы $(M-m)p\delta < \frac{\varepsilon}{2}$.

Если $\lambda_\tau < \delta$, то $I^* \le S_\tau < I^* + \varepsilon$.

§ 4. Условия интегрируемости в терминах сумм Дарбу

Теорема 1.

Пусть f — ограниченная функция на $[a, b]$.

Равносильны условия :
1) f интегрируема,
2) $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \lambda_\tau < \delta \ \Rightarrow\ S_\tau - s_\tau < \varepsilon$,
3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau\ \ S_\tau - s_\tau < \varepsilon$,

4) $I^* = I_*$.

Для интегрируемой функции $I^* = I_* = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Доказательство

$1) \Rightarrow 2)$ Пусть функция f интегрируема, $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \lambda_\tau < \delta \Rightarrow \left| I - \sigma(f,\tau,\xi) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(f,\tau,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Поскольку суммы Дарбу являются нижней и верхней гранями для интегральных сумм, то

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \le s_\tau \le S_\tau \le I + \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \le S_\tau - s_\tau \le \varepsilon.$$

$2) \Rightarrow 3)$ — очевидное утверждение.

$3) \Rightarrow 4)$ Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По свойству 3) найдется разбиение τ, для которого $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Поэтому $I^* \le S_\tau < s_\tau + \varepsilon \le I_* + \varepsilon,\ 0 \le I^* - I_* \le \varepsilon$. Следовательно, $I^* = I_*$.

$4) \Rightarrow 1)$ Положим $I = I^* = I_*$. Имеет место неравенство

$$s_\tau \le \sigma(f,\tau,\xi) \le S_\tau.$$

По лемме Дарбу $s_\tau,\ S_\tau \underset{\lambda_\tau \to 0}{\longrightarrow} I$, поэтому по теореме о милиционерах $\sigma(f,\tau,\xi) \underset{\lambda_\tau \to 0}{\longrightarrow} I$, функция f интегрируема, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$.

Определение

Пусть f — ограниченная функция на множестве Δ, $m = \inf f(\Delta)$, $M = \sup f(\Delta)$.

Число $\omega = M - m = \sup\limits_{x',x'' \in \Delta} \left(f(x'') - f(x') \right) = \sup\limits_{x',x'' \in \Delta} \left| f(x'') - f(x') \right|$ называется колебанием функции f на множестве Δ.

Пусть f — ограниченная функция на отрезке $[a,b]$, τ — разбиение, $\omega_k = M_k - m_k$ — колебание функции f на k-м отрезке разбиения. Тогда $S_\tau - s_\tau = \sum\limits_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k$ и условия интегрируемости принимают вид

2) $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sum\limits_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = 0$,

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau\ \ \sum\limits_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$

§ 5. Интегрируемость непрерывной и монотонной функций

1^0. Теорема 1

Пусть функция f непрерывна на $[a,\ b]$.

Тогда f интегрируема на $[a,\ b]$.

Доказательство

Функция f непрерывна на отрезке, поэтому она ограничена и равномерно непрерывна.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \left|x'' - x'\right| < \delta \Rightarrow \left|f\left(x''\right) - f\left(x'\right)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Если $\lambda_\tau < \delta$, то $\omega_k \le \frac{\varepsilon}{b-a}\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$.

Видим, что $\lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0$, f интегрируема.

Теорема 2.

Пусть f — ограниченная функция на $[a,\ b]$, имеет конечное число разрывов.

Тогда f интегрируема на $[a,\ b]$.

Доказательство

Для простоты ограничимся случаем одной точки разрыва $c \in (a,\ b)$. f непрерывна на $[a,\ c)$ и на $(c,\ b]$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

Подберем $\delta > 0$ так, чтобы $2(M - m)\delta < \frac{\varepsilon}{3}$.

f непрерывна на $[a,\ c-\delta]$, по теореме 1 f интегрируема на $[a,\ c-\delta]$, найдется разбиение

$$\tau_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = c - \delta$$

отрезка $[a,\ c-\delta]$, для которого $\sum\limits_{k=1}^{m} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{3}$.

Точно так же находим разбиение

$$\tau_2 : c + \delta = x_{m+1} < x_{m+2} < \cdots < x_n = b$$

отрезка $[c+\delta,\ b]$, для которого $\sum\limits_{k=m+2}^{n} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{3}$.

Введем в рассмотрение разбиение

$$\tau : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1} < \cdots < x_n = b \text{ отрезка } [a,\ b].$$

Для этого разбиения

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} \omega_k \Delta x_k + \omega_{m+1} \Delta x_{m+1} + \sum_{k=m+2}^{n} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

2^0. Теорема 3

f — монотонная функция на отрезке $[a, b]$.

Тогда f интегрируема на $[a, b]$.

Доказательство

Для определенности рассмотрим возрастающую функцию, $f(a) < f(b)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$.

Пусть $\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ — разбиение, $\lambda_\tau < \delta$.

Тогда

$$S_\tau = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Delta x_k, \quad s_\tau = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \Delta x_k ,$$

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right) \Delta x_k < \delta \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right) = \delta \left(f(b) - f(a) \right) = \varepsilon .$$

Интегрируемость функции f установлена.

3^0 Приведем еще без доказательства критерий Лебега интегрируемости по Риману

Определение

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется множеством меры нуль (в смысле Лебега), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\Delta_k = (\alpha_k, \beta_k)$ множества E интервалами, что $\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \le \varepsilon$ (т.е. $\forall n \ \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) \le \varepsilon$).

Свойства множеств меры нуль

1) Подмножество множества меры нуль само является множеством меры нуль.
2) Объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль является множеством меры нуль.
3) Невырожденный промежуток не является множеством меры нуль.
4) Множество рациональных чисел является множеством меры нуль.

Определение

Пусть f — функция на отрезке $[a, b]$, E — множество точек разрыва. Если E — множество меры нуль, f называется почти везде непрерывной.

Теорема Лебега

Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f была интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы она была почти везде непрерывной.

§ 6. *Свойства определенного интеграла*

1^0. Линейность

Теорема 1.

1) Пусть $f,\ g$ — интегрируемые на отрезке $[a,\ b]$ функции, $\alpha,\ \beta$ — вещественные числа; $h = \alpha f + \beta g$.

Тогда h интегрируема на отрезке $[a,\ b]$,

$$\int_a^b h(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказательство

Пусть τ — разбиение, ξ — выборка.

$$\sigma(h,\ \tau,\ \xi) = \sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\big(\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)\big)\Delta x_k =$$

$$= \alpha\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \beta\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \alpha\sigma(f,\ \tau,\ \xi) + \beta\sigma(g,\ \tau,\ \xi)$$

Мы установили свойство линейности для интегральных сумм. Теперь доказательство завершается простым предельным переходом:

$$\sigma(h,\ \tau,\ \xi) = \alpha\sigma(f,\ \tau,\ \xi) + \beta\sigma(g,\ \tau,\ \xi) \underset{\lambda_\tau\to 0}{\longrightarrow} \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx,$$

функция h интегрируема, справедливо равенство (1).

Дополнение. Если f интегрируема, то $|f|$ интегрируема. Если при этом $1/f$ ограничена, то и она интегрируема. Если $f,\ g$ интегрируемы, то fg интегрируема

Замечание

На интегрируемость не влияют значения функции на конечном множестве. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,\ b]$, а g отличается от f лишь в конечном числе точек, то g интегрируема и $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Пусть функции $f,\ g$ различаются лишь в конечном числе точек, скажем в точках $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$. Функция $h = g - f$ принимает ненулевые значения лишь в перечисленных точках. Для доказательства утверждения достаточно установить, что h имеет нулевой интеграл. Подберем число M так, чтобы $|h(x)| < M$, $x \in [a,\ b]$.Пусть $\varepsilon > 0$, τ — разбиение отрезка $[a,\ b]$ ранга $\lambda_\tau < \dfrac{\varepsilon}{2pM}$. Заметим, что каждая из точек $x_1 < x_2 < \cdots < x_p$ попадет не более чем в два промежутка разбиения, поэтому $S_\tau \le 2p\cdot M\cdot\lambda_\tau < \varepsilon$. Аналогичная оценка имеет место и для нижней суммы Дарбу, так что

$$-\varepsilon < s_\tau \le S_\tau < \varepsilon.$$

Функция h интегрируема, $\int_a^b h(x)\,dx = 0$.

В связи с высказанным замечанием отметим, что мы можем интегрировать функцию по отрезку $[a, b]$ в ситуации, где функция не определена в конечном числе точек, например, определена только на интервале (a, b).

2^0. Аддитивность

Теорема 2.

1) Пусть f — интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция, $[c, d] \subset [a, b]$.

Тогда f интегрируема на $[c, d]$.

2) Пусть f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$.

Тогда f интегрируема на $[a, b]$.

3) Пусть f — интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция, $c \in (a, b)$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{2}$$

Доказательство.

1) Возьмем произвольное положительное ε. По критерию интегрируемости найдется разбиение $\tau: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$, для которого $\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$. Можно считать, что c, d — точки разбиения τ, для определенности $c = x_l$, $d = x_m$. Теперь $\tau_1 : c = x_l < x_{l+1} < \cdots < x_m = d$ — разбиение отрезка $[c, d]$ и $\sum_{k=l+1}^{m} \omega_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$, f интегрируема на $[c, d]$.

2) Возьмем произвольное положительное ε. По критерию интегрируемости найдутся разбиения $\tau_1 : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = c$ отрезка $[a, c]$ и $\tau_2 : c = x_m < x_{m+1} < \cdots < x_n = b$ отрезка $[c, b]$, для которых $\sum_{k=1}^{m} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\sum_{k=m+1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим разбиение $\tau : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1} < \cdots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$. Для этого разбиения $\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. По критерию интегрируемости f интегрируема на $[a, b]$.

3) Сохраним обозначения предыдущего пункта и положим $I = \int_a^b f(x)\,dx$, $I_1 = \int_a^c f(x)\,dx$, $I_2 = \int_c^b f(x)\,dx$. Тогда

$$s_\tau = s_{\tau_1} + s_{\tau_2} \le I_1 + I_2 \le S_{\tau_1} + S_{\tau_2} = S_\tau$$
$$s_\tau \le I \le S_\tau .$$

Получается, что $|I_1 + I_2 - I| \le S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Поскольку неравенство справедливо для произвольного положительного ε, то $I_1 + I_2 = I$.

3^0. Монотонность. Неравенства

Теорема 3. Положительность интеграла.

Пусть f — интегрируемая на отрезке $[a,\, b]$ функция,

$$f \geq 0.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0. \tag{3}$$

Доказательство. Для любого разбиения τ и любой выборки ξ из этого разбиения

$$\sigma(f,\, \tau,\, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \geq 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, получаем неравенство (3).

Дополнение. Пусть f интегрируема на $[a,\, b]$, $f \geq 0$, для некоторой точки $x_0 \in [a,\, b]$ выполнено строгое неравенство $f(x_0) > 0$, при этом f непрерывна в этой точке.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

Действительно, по непрерывности можно найти такое $\delta > 0$, что $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0$ для всех $x \in [x_0 - \delta,\, x_0 + \delta]$, так что для разбиения τ отрезка $[a,\, b]$ на три части $[a,\, x_0 - \delta]$, $[x_0 - \delta,\, x_0 + \delta]$, $[x_0 + \delta,\, b]$ можно записать неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq s_\tau = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 \geq 0 + \frac{1}{2} f(x_0)\, 2\delta + 0 = f(x_0)\,\delta > 0$$

Теорема 4. Монотонность интеграла.

Пусть $f,\, g$ — интегрируемые на отрезке $[a,\, b]$ функции,

$$f \leq g.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx. \tag{4}$$

Неравенства "можно" интегрировать.

Доказательство. Применяя теорему 3 к функции $h = g - f$, получаем неравенство $\int\limits_a^b h(x)\,dx \geq 0$. Теорема 1 дает неравенство (4).

Следствия

1) Пусть

$$\forall x \in [a,\, b]\ m \leq f(x) \leq M.$$

Тогда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a). \tag{5}$$

2) Если f интегрируема на $[a,\, b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{6}$$

Неравенство (6) получается интегрированием неравенства

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|,$$

справедливого при всех $x \in [a, b]$.

3) Пусть

$$\forall x \in [a, b] \; |f(x)| \le M.$$

Тогда

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M(b-a) \tag{7}$$

Неравенство (7) получается из следствий 1), 2).

4^0. Интегральная теорема о среднем

Теорема 4.

1) Пусть f интегрируема на $[a, b]$ и

$$\forall x \in [a, b] \; m \le f(x) \le M.$$

Тогда

$$\exists \mu \in [m, M] \int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a). \tag{8}$$

2) Пусть f непрерывна на $[a, b]$.

Тогда

$$\exists \xi \in [a, b] \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{9}$$

Доказательство. 1) Положим

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Тогда $m \le \mu \le M$.

2) Если в условиях предыдущего пункта мы возьмем в качестве m, M наименьшее и наибольшее значения функции f, то в силу теоремы Коши о промежуточном значении непрерывной функции число μ окажется значением функции f, найдется $\xi \in [a, b]$, для которого $f(\xi) = \mu$. Видим, что равенство (8) превращается в (9).

Теорема 5. Обобщенная теорема о среднем.

1) Пусть f, g интегрируемы на $[a, b]$, $g \ge 0$ и

$$\forall x \in [a, b] \; m \le f(x) \le M. \tag{10}$$

Тогда

$$\exists \mu \in [m, M] \int_a^b f(x) g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{11}$$

2) Пусть в дополнение к условиям пункта 1) f непрерывна на $[a, b]$.
Тогда

$$\exists \xi \in [a, b] \int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx. \qquad (12)$$

Доказательство. 1) Умножив неравенство (10) на $g(x) \geq 0$, получим неравенство

$$mg(x) \leq f(x) g(x) \leq Mg(x),$$

интегрирование которого дает

$$m\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

Если $\int_a^b g(x) dx = 0$, то утверждение теоремы становится очевидным. Если же $\int_a^b g(x) dx \neq 0$, то положим

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x) g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$$

и увидим, что $m \leq \mu \leq M$ и выполняется равенство (11).
2) Здесь можно дословно повторить рассуждение из доказательства теоремы 4.

5^0. Обобщение понятия интеграла

До сих пор при рассмотрении интеграла $\int_a^b f(x) dx$ предполагалось, что $a < b$. Удобно принять соглашения:

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$$

При таком соглашении равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

выражающее аддитивность интеграла, оказывается верным при любом расположении точек a, b, c.
Сохраняется свойство линейности.
Положительность нарушается.
Справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|$$