Глава III. Теория неявных функций

А.А.Моисеев НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

https://elib.spbstu.ru/dl/5/tr/2021/tr21-21.pdf/info

§ 1. Простейшая теорема о неявных функциях

1^0. Определение.

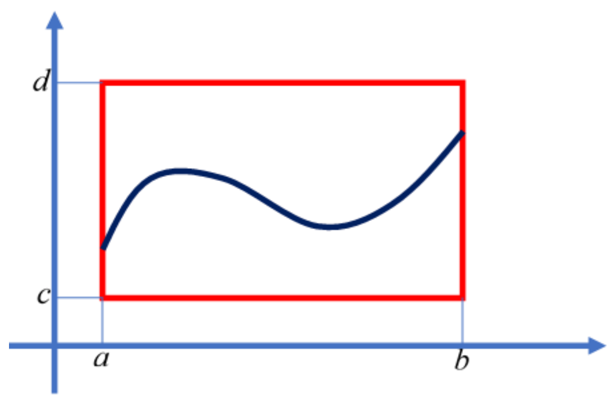
Пусть F — функция двух переменных, определенная на множестве E; прямоугольник $\Pi = (a,\, b)\times(c,\, d)$ содержится в E.

Мы скажем, что уравнение

$$F(x,\, y) = 0 \tag{1}$$

однозначно разрешимо относительно y на прямоугольнике Π, если

$$\forall x \in (a,\, b)\ \exists!\, y \in (c,\, d)\ F(x,\, y) = 0.$$



В условиях однозначной разрешимости уравнения (1) построим функцию f на интервале $(a,\, b)$:

$$\forall x \in (a,\, b)\ f(x) = y \Leftrightarrow F(x,\, y) = 0.$$

f называется функцией, неявно заданной уравнением (1). Выполнено равенство

$$\forall x \in (a,\, b)\ F(x,\, f(x)) = 0. \tag{2}$$

Однозначная разрешимость означает, что существует и единственна функция f, т.ч. выполнено условие (2).

Функция f неявно определяется уравнением (1) на прямоугольнике Π в том и только в том случае, если уравнения $F(x,\, y) = 0$ и $y = f(x)$ равносильны (при условии, что $x \in (a,\, b);\ y \in (c,\, d)$).

2^0. Теорема 1. Простейшая теорема о неявных функциях.

Пусть F непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(x_0,\, y_0)$.

$$F(x_0,\, y_0) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\, y_0) \neq 0. \tag{4}$$

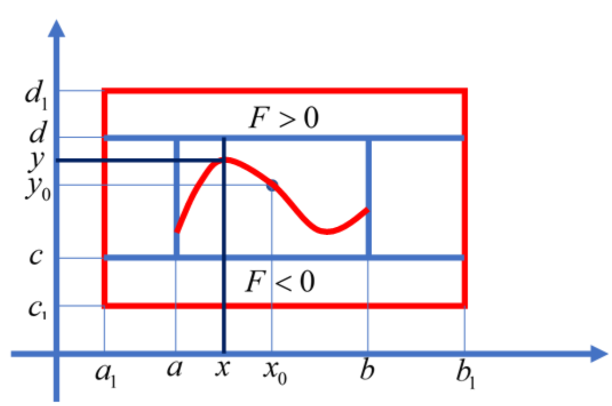
Тогда существует прямоугольник $\Pi = (a,\, b) \times (c,\, d)$, содержащий точку $(x_0,\, y_0)$, на котором уравнение (1) однозначно разрешимо относительно y. Функция f, неявно определяемая уравнением (1), непрерывно дифференцируема,

$$\forall x \in (a,\, b)\ \ f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,\, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\, f(x))}. \tag{5}$$

Доказательство.

Не умаляя общности, можно считать, что $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,\, y_0) > 0$.

Подберем содержащий точку $(x_0,\, y_0)$ прямоугольник $\Pi_1 = (a_1,\, b_1) \times (c_1,\, d_1)$, на котором $\dfrac{\partial F}{\partial y} > 0$. Возьмем



содержащий внутри себя точку y_0 отрезок $\left[c,\, d\right] \subset \left(c_1,\, d_1\right)$. Функция $\psi : \psi\left(y\right) = F\left(x_0,\, y\right)$ строго возрастает на $\left[c,\, d\right]$, поэтому $F\left(x_0,\, c\right) < 0,\, F\left(x_0,\, d\right) > 0$. Подберем такой содержащий внутри себя точку x_0 отрезок $\left[a,\, b\right] \subset \left(a_1,\, b_1\right)$, что при всяком $x \in \left[a,\, b\right]$ выполняются неравенства $F\left(x,\, c\right) < 0,\, F\left(x,\, d\right) > 0$. Убедимся в однозначной разрешимости уравнения (1) на прямоугольнике $\Pi = \left(a,\, b\right) \times \left(c,\, d\right)$. Пусть $x \in \left(a,\, b\right)$. Функция $\psi : \psi\left(y\right) = F\left(x,\, y\right)$ непрерывна и строго возрастает на $\left[c,\, d\right]$, $\psi\left(c\right) = F\left(x,\, c\right) < 0,\, \psi\left(d\right) = F\left(x,\, d\right) > 0$, поэтому существует и единствен $y \in \left(c,\, d\right)$, для которого $\psi\left(y\right) = F\left(x,\, y\right) = 0$. Уравнение (1) однозначно разрешимо на прямоугольнике Π.

Пусть функция f неявно определяется уравнением (1), $\forall x \in \left(a,\, b\right)\; F\left(x,\, f\left(x\right)\right) = 0$. Зафиксируем некоторую точку $x \in \left(a,\, b\right)$, введем обозначение $y = f\left(x\right)$. Для $x + \Delta x \in \left(a,\, b\right)$ положим $\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)$. Теперь $F\left(x,\, y\right) = 0,\, F\left(x + \Delta x,\, y + \Delta y\right) = 0$, по формуле конечных приращений

$$\begin{aligned} 0 &= F\left(x + \Delta x,\, y + \Delta y\right) - F\left(x,\, y\right) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}\left(x + \theta\Delta x,\, y + \theta\Delta y\right)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\left(x + \theta\Delta x,\, y + \theta\Delta y\right)\Delta y \end{aligned} \tag{6}$$

для некоторого $\theta \in \left(0, 1\right)$.

Функции $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}$ непрерывны на компакте $\overline{\Pi}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ строго положительна. По теореме Вейерштрасса найдутся положительные числа $m,\, M$, т.ч.

$$\forall \left(x,\, y\right) \in \Pi \; \left|\frac{\partial F}{\partial x}\left(x,\, y\right)\right| \le M,\, \frac{\partial F}{\partial y}\left(x,\, y\right) \ge m > 0.$$

Из формулы (6) следует неравенство

$$|\Delta y| \le \frac{M}{m}|\Delta x|, \left| f(x+\Delta x) - f(x) \right| \le \frac{M}{m}|\Delta x|,$$

из которого следует непрерывность функции f.

При $\Delta x \neq 0$ формулу (6) можно записать в виде

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}. \tag{7}$$

Перейдем к пределу в равенстве (7) при $\Delta x \to 0$. Непрерывность функции f означает, что при этом и $\Delta y \to 0$. Поскольку $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывны, мы приходим к выводу, что

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\to} -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\ y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\ y)}, \tag{8}$$

функция f имеет в точке x производную

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\ y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\ y)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\ f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\ f(x))}.$$

Из последней формулы вытекает и непрерывность f'.

Дополнение. Если $F \in C^2$, то и $f \in C^2$.

Существование второй производной функции f мы получаем из формулы (5) с помощью теорем о дифференцируемости композиции и частного,

$$f'' = -\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} f'\right)\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} f'\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3} =$$

$$= -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}.$$

§ 2. Неявные функции нескольких переменных

Теорема 1.

Пусть F — функция $(n+1)$ переменной, непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $x_0 = \left(x_0^1, \ldots, x_0^n\right) \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

$$F(x_0, y_0) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \tag{2}$$

Тогда существуют такие окрестность U точки x_0 и интервал (c, d), содержащий точку y_0, что уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{3}$$

однозначно разрешимо относительно y на множестве $U \times (c, d)$, т.е.

$$\forall x \in U \ \exists! y \in (c, d) \ F(x, y) = 0. \tag{4}$$

Функция f, неявно заданная уравнением (3), непрерывно дифференцируема и

$$\forall x \in U \;\; f_i'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x^i}\left(x,\ f(x)\right)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(x,\ f(x)\right)},\ i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Теорема доказывается так же, как предыдущая.

Уравнение касательной плоскости.

Рассмотрим поверхность, заданную уравнением

$$F(x,\ y,\ z) = 0, \tag{6}$$

где F — непрерывно дифференцируемая функция. Пусть $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — точка на поверхности. Предположим далее, что выполнены условия теоремы о неявной функции, например, $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$. В некоторой окрестности точки M_0 уравнение поверхности записывается в равносильной форме

$$z = f(x,\ y). \tag{7}$$

Уравнение касательной плоскости имеет вид

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,\ y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,\ y_0)} (y - y_0).$$

Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},$$

то это уравнение можем записать в симметричном виде

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}\left(x-x_0\right)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}\left(y-y_0\right)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,\, y_0,\, z_0)}\left(z-z_0\right)=0\,. \qquad (8)$$