Лекции 19 – 20 05.11.2024 , 08.11.2024

§ 5.Правило Лопиталя

1[0]. Правило Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$

Теорема 1.

Пусть $f,\ g$ — функции, определенные на $(a,\ b)$.

1) $f,\ g$ дифференцируемы во всех точках интервала,

$$\forall x \in (a,\ b) \quad g'(x) \neq 0 .$$

2) $f(x) \underset{x\to b-0}{\rightarrow} 0,\ \ g(x) \underset{x\to b-0}{\rightarrow} 0$

3) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to b-0}{\rightarrow} A$.

Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to b-0}{\rightarrow} A.$$

Доказательство.

Доопределим функции $f,\ g$ в точке b по непрерывности, полагая $f(b)=g(b)=0$. Заметим, что по теореме Ролля g не обращается в нуль на $(a,\ b)$.

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in (a,\ b),\ x_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} b$. По теореме Коши

$$\forall n \ \exists \xi_n \in (x_n,\ b) \ \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n)-f(b)}{g(x_n)-g(b)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Получена последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} b$. Поскольку $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x\to b-0}{\rightarrow} A$, то $\dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} A$, $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} A$.

Итак, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to b-0}{\rightarrow} A$, что и требовалось доказать.

Замечания. 1) Аналогичная теорема имеет место для $x \to a+0$ и $x \to a$.

2) Для b допускается значение $+\infty$, для a — значение $-\infty$.

2⁰. Правило Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

Теорема 2.

Пусть f, g — функции, определенные на $(a,\, b)$.

1) f, g дифференцируемы во всех точках интервала,

$$\forall x \in (a,\, b) \quad g'(x) \neq 0.$$

2) $f(x) \underset{x \to b-0}{\to} \infty,\ g(x) \underset{x \to b-0}{\to} \infty$

3) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x \to b-0}{\to} A$.

Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to b-0}{\to} A.$$

Замечания. 1) Аналогичная теорема имеет место для $x \to a+0$ и $x \to a$.

2) Для b допускается значение $+\infty$, для a — значение $-\infty$.

3) Условие $f(x) \underset{x \to b-0}{\to} \infty$ в доказательстве не используется, но условие $g(x) \underset{x \to b-0}{\to} \infty$ существенно. Так, функции $\dfrac{x^2+1}{x^3+x}$ и $\dfrac{2x}{3x^2+1}$ имеют разные пределы при $x \to 1$.

4) Может случиться, что $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to b-0}{\to} A$, но $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x \to b-0}{\not\to} A$. Например, $\dfrac{x+\cos x}{x} \underset{x \to +\infty}{\to} 1$, но $1-\sin x$ не имеет предела.

Доказательство.

Ограничимся рассмотрением конечного A, хотя теорема справедлива и для $A = \pm\infty$.

Для определенности считаем, что

$$\forall x\ g'(x) > 0,\ g(x) \underset{x \to b-0}{\to} +\infty,\ \forall x\ g(x) > 0,$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

Подберем такой x_0, что

$$\forall x \in (x_0,\, b)\ A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

По теореме Коши

$$\forall x \in (x_0,\, b)\ \exists \xi \in (x_0,\, x)\ \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Поэтому

$$\forall x \in (x_0,\, b)\ A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Умножим неравенство на $g(x)-g(x_0)>0$:

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(g(x)-g(x_0)\right)<f(x)-f(x_0)<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(g(x)-g(x_0)\right),$$

разделим на $g(x)>0$:

$$\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_0)}{g(x)}<\frac{f(x)}{g(x)}<\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_0)}{g(x)}.$$

Поскольку $\alpha(x)=\left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_0)}{g(x)}\underset{x\to b-0}{\to}A-\frac{\varepsilon}{2}>A-\varepsilon$, а $\beta(x)=\left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_0)}{g(x)}\underset{x\to b-0}{\to}A+\frac{\varepsilon}{2}<A+\varepsilon$, то найдется такой $x_1\in(x_0,\, b)$, что

$$\forall x \in (x_1,\, b)\ \alpha(x)>A-\varepsilon,\ \beta(x)<A+\varepsilon.$$

Итак,

$$\forall \varepsilon>0\ \exists x_1\in(a,\, b)\ \ \forall x\in(x_1,\, b)\ A-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<A+\varepsilon,$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\underset{x\to b-0}{\to}A.$$

3^0. Примеры

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^\mu}$, $a>1,\ \mu>0$.

Подберем натуральное k так, чтобы $k-1<\mu\le k$ и применим k раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^\mu}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln a}{\mu x^{\mu-1}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x\ln^k a}{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)x^{\mu-k}}=+\infty\ .$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\mu}$, $\mu>0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\mu}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{\mu x^{\mu-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^\mu}=0\ .$$

3) $\lim\limits_{x\to+0}x^\mu\ln x$, $\mu>0$.

$$\lim_{x\to+0}x^\mu\ln x=\left[x=\frac{1}{y}\right]=\lim_{y\to+\infty}\frac{-\ln y}{y^\mu}=0$$

4) $\lim\limits_{x\to+0}x^x=\lim\limits_{x\to+0}e^{x\ln x}=e^0=1$.

5) $$\lim_{x\to0}\frac{e^x\sqrt[3]{1-3x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x\sqrt[3]{1-3x}-e^x(1-3x)^{-2/3}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1-3x)^{-2/3}(1-3x-1)}{2x}=-\frac{3}{2}\ .$$

§ 6. Формула Тейлора

1^0. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда

$$f(x)\underset{x\to x_0}{=}f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ . \qquad (1)$$

Формула (1) дает приближение функции f линейной функцией с точностью до бесконечно малых порядка выше первого. Предполагая существование последующих производных, можно получить приближения большей точности.

Определение

Пусть функция f имеет в точке x_0 производные до n -го порядка. (Это означает, что производные до $(n-1)$-го порядка существуют в целой окрестности точки x_0, а функция $f^{(n-1)}$ имеет производную в точке x_0).

Многочлен

$$T_n : T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (2)$$

называется многочленом Тейлора функции f порядка (степени) n в точке x_0 (по степеням $x - x_0$, с центром разложения x_0). В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора называют еще многочленом Маклорена.

Представление

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \qquad (3)$$

называется формулой Тейлора.

$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора.

Предложение

Пусть T_n — многочлен Тейлора функции f порядка n в точке x_0.

Тогда

$$T(x_0) = f(x_0),\ T'(x_0) = f'(x_0),\ T''(x_0) = f''(x_0), \ldots,\ T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Доказательство.

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad T(x_0) = f(x_0);$$

$$T_n'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}, \qquad T'(x_0) = f'(x_0);$$

$$T_n''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2}, \qquad T''(x_0) = f''(x_0)$$

....

$$T^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0), \qquad T^{(n)}(x_0) = f^{n}(x_0).$$

Лемма

Пусть

$$R(x_0) = R'(x_0) = \cdots = R^{(n)}(x_0) = 0.$$

Тогда

$$R(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$$

Доказательство.

Мы должны показать, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Для вычисления предела применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \cdots = \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x) - R^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{n!} R^{(n)}(x_0) = 0$$

Теорема 1

Пусть функция f имеет в точке x_0 производные до n -го порядка. (Это означает, что производные до $(n-1)$-го порядка существуют в целой окрестности точки x_0, а функция $f^{(n-1)}$ имеет производную в точке x_0).

Тогда

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \ R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \ — \tag{4}$$

формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Доказательство.

Теорема прямо вытекает из предложения и леммы.

Предложение. Единственность тейлоровского представления.

Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right),$$
$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Тогда

$$a_0 = b_0, \ a_1 = b_1, \ldots, \ a_n = b_n.$$

Доказательство.

Вычитание дает соотношение

$$c_0 + c_1(x-x_0) + \cdots + c_n(x-x_0)^n = o\left((x-x_0)^n\right),$$

где $c_k = a_k - b_k$.

Переход к пределу при $x \to x_0$ дает $c_0 = 0$.

Равенство принимает вид

$$c_1\left(x-x_0\right)+\dots+c_n\left(x-x_0\right)^n = o\left(\left(x-x_0\right)^n\right)$$

Делением на $x - x_0$ получаем

$$c_1 + c_2\left(x-x_0\right)+\dots+c_n\left(x-x_0\right)^{n-1} = o\left(\left(x-x_0\right)^{n-1}\right).$$

Переход к пределу при $x \to x_0$ дает $c_1 = 0$.

Продолжая этот процесс, получаем

$$c_n = o(1), \ c_n = 0.$$

2⁰. Представление основных элементарных функций формулой Тейлора

Теорема 2.

Имеют место следующие представления

I $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$

II $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right)$,

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n-1}\right)$,

III $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$,

IV $(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \dots + \dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$,

V $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$.

Доказательство.

Достаточно провести построение многочленов Тейлора.

I. Пусть $f\left(x\right)=e^{x},\ x_0=0$. Тогда $f^{(k)}\left(x\right)=e^{x},\ f\left(0\right)=1$. Многочлен Тейлора T_n имеет коэффициенты $a_k=\dfrac{1}{k!},\ T_n\left(x\right)=1+x+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$

III. Пусть $f\left(x\right)=\cos x,\ x_0=0$. Тогда

$$f^{(k)}\left(x\right)=\cos\left(x+\frac{\pi k}{2}\right),\ f^{(k)}\left(0\right)=\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right),\ f^{(2j-1)}\left(0\right)=0,\ f^{(2j)}\left(0\right)=\cos\pi j=\left(-1\right)^{j},$$

$$T_{2j}\left(x\right)=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\left(-1\right)^{j}\frac{x^{2j}}{\left(2j\right)!},\ T_{2j+1}\left(x\right)=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\left(-1\right)^{j}\frac{x^{2j}}{\left(2j\right)!}.$$

IV. Пусть $f\left(x\right)=\left(1+x\right)^{\mu},\ x_0=0$. Тогда

$f^{(k)}\left(x\right)=\mu\left(\mu-1\right)\cdots\left(\mu-n+1\right)\left(1+x\right)^{\mu-n},\ f^{(n)}\left(0\right)=\mu\left(\mu-1\right)\cdots\left(\mu-n+1\right)$.

Многочлен Тейлора имеет вид

$$T_n\left(x\right)=1+\mu x+\cdots+\frac{\mu\left(\mu-1\right)\cdots\left(\mu-n+1\right)}{n!}x^n.$$

В частном случае $\mu=-1$ получим

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+\left(-1\right)^n x^n+o\left(x^n\right),$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2-\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$$

V. Пусть $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right),\ x_0=0$. Производная $g\left(x\right)=f'\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x}$ имеет представление

$$g\left(x\right)=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+\left(-1\right)^n x^n+o\left(x^n\right).$$

Поэтому $\dfrac{g^{(k)}\left(0\right)}{k!}=\left(-1\right)^k,\ \dfrac{f^{(k+1)}\left(0\right)}{k!}=\left(-1\right)^k,\ \dfrac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!}=\dfrac{\left(-1\right)^{k-1}}{k}$

Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sqrt[3]{1-3x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-x+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}(3x)^2+o\left(x^2\right)\right)-1}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-x-x^2+o\left(x^2\right)\right)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=-\frac{3}{2}$$

Еще несколько разложений

VI $\operatorname{sh} x=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n-1}\right)$

VII $\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-\cdots+(-1)^{n-1}(n+1)x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+2x^2+\cdots+(n+1)x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{x^3}{16}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+o\left(x^{2n-1}\right)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right)$$

3^0. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Теорема 3

Пусть функция f имеет $n+1$ производную в интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$; T_n — многочлен Тейлора.

Тогда

$$\forall x \in (a, b)\ \exists \theta \in (0, 1)\ f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta \cdot (x - x_0)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (5)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta \cdot (x - x_0)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Доказательство

Для определенности считаем, что $x > x_0$.

Запишем развернутое выражение для остаточного члена

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

По образцу правой части этой формулы построим функцию

$$F : F(z) = f(x) - f(z) - f'(z)(x - z) - \dots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(z)(x - z)^n$$

Заметим, что

$$F(x_0) = R_n(x),\ F(x) = 0,$$

$$\begin{aligned}
&F'(z) = -f'(z) - \\
&- f''(z)(x - z) + f'(z) - \\
&- \frac{1}{2!} f'''(z)(x - z)^2 + f''(z)(x - z) - \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&- \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(z)(x - z)^n + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(z)(x - z)^{n-1} = \\
&= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(z)(x - z)^n
\end{aligned}$$

Пусть ψ — дифференцируемая функция на отрезке $\left[x_0,\ x\right]$. По теореме Коши

$$\exists\theta\in\left(0,1\right)\ \frac{F\left(x\right)-F\left(x_0\right)}{\psi\left(x\right)-\psi\left(x_0\right)}=\frac{F'\left(x_0+\theta\cdot\left(x-x_0\right)\right)}{\psi'\left(x_0+\theta\cdot\left(x-x_0\right)\right)}$$

$$R_n\left(x\right)=\frac{1}{n!}\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\cdot\left(x-x_0\right)\right)}{\psi'\left(x_0+\theta\cdot\left(x-x_0\right)\right)}\left(\left(1-\theta\right)\left(x-x_0\right)\right)^n\left(\psi\left(x\right)-\psi\left(x_0\right)\right)$$

В качестве ψ возьмем функцию

$$\psi\left(z\right)=\left(x-z\right)^{n+1}.$$

Тогда

$$\psi\left(x\right)=0,\ \psi\left(x_0\right)=\left(x-x_0\right)^{n+1};$$

$$\psi'\left(z\right)=-\left(n+1\right)\left(x-z\right)^n;\ \psi'\left(x_0+\theta\cdot\left(x-x_0\right)\right)=-\left(n+1\right)\left(\left(1-\theta\right)\left(x-x_0\right)\right)^n$$

$$R_n\left(x\right)=-\frac{1}{n!}\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\cdot\left(x-x_0\right)\right)}{\left(n+1\right)}\left(-\left(x-x_0\right)^{n+1}\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\cdot\left(x-x_0\right)\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

Если взять

$$\psi\left(z\right)=x-z,$$

то получится остаточный член в форме Коши:

$$R_n\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta\cdot\left(x-x_0\right)\right)}{n!}\left(1-\theta\right)^n\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

Если $f=P_n$ — многочлен степени не выше n, то $R_n=0$, получается формула Тейлора для многочлена:

$$P_n\left(x\right)=P_n\left(x_0\right)+P_n'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\cdots+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^n.$$