Лекция 18 04.04.2025

§ 10. Экстремум функции нескольких переменных

1^0. *Понятие экстремума*

Определение. Пусть f — функция n переменных, определенная в окрестности V_0 точки x_0.

1) x_0 называется точкой минимума функции f, если существует такая окрестность $V \subset V_0$, что

$$\forall x \in V \;\; f(x) \geq f(x_0).$$

2) x_0 называется точкой максимума функции f, если существует такая окрестность $V \subset V_0$, что

$$\forall x \in V \;\; f(x) \leq f(x_0).$$

3) x_0 называется точкой экстремума, если она является точкой минимума или точкой максимума.

1') x_0 называется точкой строгого минимума функции f, если существует такая окрестность $V \subset V_0$, что

$$\forall x \in \dot{V} \;\; f(x) > f(x_0).$$

2') x_0 называется точкой строгого максимума функции f, если существует такая окрестность $V \subset V_0$, что

$$\forall x \in \dot{V} \;\; f(x) < f(x_0).$$

3') x_0 называется точкой строгого экстремума, если она является точкой строгого минимума или точкой строгого максимума.

2^0. *Необходимые условия экстремума*

Теорема 1.

Пусть функция f определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке экстремум. Тогда

1) если для некоторого $i = 1, \ldots, n$ существует частная производная $f_i'(x_0)$, то эта частная производная обязана обратиться в нуль: $f_i'(x_0) = 0$;

2) если функция дифференцируема, дифференциал оказывается нулевым: $df(x_0) = 0$, т.е. $f_i'(x_0) = 0,\ i = 1, \ldots, n$.

Точка x_0, для которой $df(x_0) = 0$, называется стационарной.

Доказательство. Пусть, например, существует $f_1'(x_0)$. Рассмотрим функцию одной переменной

$$\varphi : \varphi(t) = f\left(t, x_0^2, \ldots, x_0^n\right),$$

определенную в окрестности точки x_0^1. Эта функция имеет экстремум в точке x_0^1, и существует производная $\varphi'\left(x_0^1\right) = f_1'\left(x_0\right)$. По необходимому условию экстремума функции одной переменной $\varphi'\left(x_0^1\right) = f_1'\left(x_0\right) = 0$.

Примеры. 1) Для функции $f\left(x, y\right) = x^2 + y^2$ точка $\left(0,\ 0\right)$ является точкой строгого минимума. $\left(0,\ 0\right)$ — стационарная точка.

2) Для функции $f\left(x, y\right) = x^2 - y^2$ точка $\left(0,\ 0\right)$ стационарная, но не является точкой экстремума.

Условие $df = 0$ является необходимым, но не является достаточным для экстремальности точки.

3^0. *Достаточные условия экстремума*

Теорема 2.

Пусть f — определена в окрестности точки x_0 и дважды непрерывно дифференцируема в этой точке.

Предположим выполнение необходимого условия экстремума: x_0 — стационарная точка ($df\left(x_0\right) = 0$, $f_i'\left(x_0\right) = 0,\ i = 1, \ldots, n$).

Тогда

1) если $d^2 f\left(x_0\right)$ — положительно определенная квадратичная форма ($\forall h \neq 0\ d^2 f\left(x_0, h\right) > 0$), то x_0 — точка строгого минимума функции f;

2) если $d^2 f\left(x_0\right)$ — отрицательно определенная квадратичная форма, то x_0 — точка строгого максимума функции f;

3) если $d^2 f\left(x_0\right)$ — неопределенная квадратичная форма ($\exists h', h''\ d^2 f\left(x_0, h'\right) > 0,\ d^2 f\left(x_0, h''\right) < 0$), то x_0 не является точкой экстремума.

Доказательство. 1) $d^2 f\left(x_0,\ h\right) = \sum\limits_{i,\, j=1}^{n} f_{ij}''\left(x_0\right) h^i h^j$ — положительно определенная квадратичная форма. Необходимым и достаточным условием положительной определенности является (критерий Сильвестра) положительность угловых миноров матрицы квадратичной формы:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} f_{11}''\left(x_0\right) & \cdots & f_{1k}''\left(x_0\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}''\left(x_0\right) & \cdots & f_{kk}''\left(x_0\right) \end{vmatrix} > 0,\ k = 1, \ldots, n.$$

Поскольку f_{ij}'' непрерывны в точке x_0, то условие Сильвестра выполнено, а $d^2 f$ положительно определен и в точках, близких к x_0:

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in K_\delta\left(x_0\right)\quad d^2 f\left(x\right) \text{ — положительно определенная квадратичная форма.}$$

Пусть $x \in \dot{K}_\delta\left(x_0\right)$, $h = x - x_0$, тогда по формуле Тейлора для некоторого $\theta \in \left(0,\ 1\right)$

$$f\left(x\right) - f\left(x_0\right) = \Delta f\left(x_0, h\right) = \frac{1}{2!} d^2 f\left(x_0 + \theta h, h\right) > 0.$$

x_0 — точка строгого минимума функции f.

3) Пусть $d^2 f(x_0,h')>0$. При $t>0$ имеем

$$\Delta f(x_0,th')=\frac{1}{2!}d^2 f(x_0+\theta th',th'),$$

$$\frac{\Delta f(x_0,th')}{t^2}=\frac{1}{2!}d^2 f(x_0+\theta th',h')\underset{t\to 0}{\to}\frac{1}{2!}d^2 f(x_0,h')>0.$$

При малых t приращение $\Delta f(x_0,th')$ оказывается строго положительным, в любой окрестности точки x_0 существуют точки с большим значением функции f, чем в точке x_0. Аналогично устанавливается существование точек с меньшим, чем в точке x_0, значением функции f.

Функция f не имеет экстремума в точке x_0.

Приведем частный случай теоремы 1 для функции двух переменных.

Теорема 3. Пусть f — определена в окрестности точки (x_0,y_0) и дважды непрерывно дифференцируема в этой точке.

Предположим, что $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$.

Положим $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0),\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0),\ C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0);\ \Delta=AC-B^2$.

Тогда

1) если $\Delta>0,\ A>0$, то (x_0,y_0) — точка строгого минимума функции f;

2) если $\Delta>0,\ A<0$, то (x_0,y_0) — точка строгого максимума функции f;

3) если $\Delta<0$, то (x_0,y_0) не является точкой экстремума.

Примеры.

1) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$.

$(0,0)$ — строгий минимум.

2) $f(x,y)=x^2+4xy+y^2$.

$(0,0)$ — седло, стационарная точка, не являющаяся экстремальной.

3) В теоремах 1, 2 не рассмотрен случай полуопределенной квадратичной формы. В такой ситуации общего ответа на вопрос об экстремальности дать нельзя. Функции $f(x,y)=x^2+y^4$ и $g(x,y)=x^2-y^4$ имеют нулевой дифференциал в точке $(0,0)$ и полуопределенный второй дифференциал $2dx^2$. Функция f имеет строгий минимум, а функция g экстремума не имеет.

4^0. *Наименьшее и наибольшее значения функции*

Пусть f — непрерывная функция на компакте E. По теореме Вейерштрасса f имеет наименьшее и наибольшее значения.

Предположим, что функция f непрерывно дифференцируема. Если искомое значение достигается во внутренней точке множества E, то эта точка является точкой экстремума, по необходимому условию эта точка оказывается стационарной. Получаем следующий метод отыскания наименьших и наибольших значений. Находим стационарные точки функции f во внутренности множества E, добавляем к списку подозрительные точки границы. Во всех выписанных точках вычисляем значения функции f, выбираем наименьшее и наибольшее. При исследовании функции на границе множества E целесообразно пользоваться техникой отыскания условных экстремумов, которую мы обсудим несколько позже.

Пример.

1) $u = x^2 + y^2 - 2x - 4y,\ x^2 + y^2 \le 20$.

Мы ищем наименьшее и наибольшее значения функции u на замкнутом круге. Частные производные имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 4.$$

Функция имеет единственную стационарную точку $(1,2)$. Поведение функции на границе круга проведем , пользуясь параметрическими уравнениями окружности

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{5}\cos t \\ y = 2\sqrt{5}\sin t \end{cases}$$

Для исследуемой функции получается представление

$$u = 20 - 4\sqrt{5}\cos t - 8\sqrt{5}\sin t = 20 + 20\sin(t - t_0).$$

Наименьшим значением на границе будет $u = 0$, принимаемое в точке $(2,4)$, а наибольшее значение 40 достигается в точке $(-2,-4)$.

На замкнутом круге наименьшее значение $u = -5$ функция принимает в точке $(1,2)$, а наибольшее 40 — в точке $(-2,-4)$.