Лекция 18. 01.11.2024

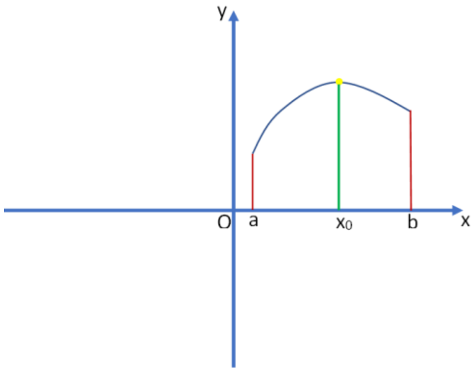
Глава V. Основные теоремы дифференциального исчисления

§ 1 Теорема Ферма

Теорема 1. Ферма

Пусть функция f определена на интервале (a, b) и в точке $x_0 \in (a, b)$ принимает наибольшее или наименьшее значение:

$$\forall x \in (a, b)\ f(x_0) \geq f(x) \text{ или}$$
$$\forall x \in (a, b)\ f(x_0) \leq f(x).$$



Если f дифференцируема в точке x_0, то

$$f'(x_0) = 0.$$

Доказательство

Пусть в точке x_0 функция f достигает своего наибольшего значения.

Для $x > x_0$ имеем $f(x) - f(x_0) \leq 0,\ x - x_0 > 0$, поэтому $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$. Предельным переходом ($x \to x_0 + 0$) получаем $f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$.

Для $x < x_0$ имеем $f(x) - f(x_0) \leq 0,\ x - x_0 < 0$, поэтому $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. Предельным переходом ($x \to x_0 - 0$) получаем $f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0$.

В итоге мы приходим к выводу об обращении производной в нуль, $f'(x_0) = 0$.

Замечание

Дифференцируемость — условие теоремы. Функция может принимать наибольшее или наименьшее значение и не иметь производной. Например, такую ситуацию мы видим для $f(x) = |x|,\ x_0 = 0$.

Теорема 2. Дарбу

Пусть функция f определена на промежутке Δ и дифференцируема во всех точках этого промежутка. В точках $a,\, b \in \Delta$ производная принимает значения $f'(a) = A,\; f'(b) = B$, число C лежит между a, b.

Тогда найдется точка c между $a,\, b$, для которой $f'(c) = C$.

Доказательство.

Рассмотрим сначала случай, где $a < b$, $f'(a) > 0,\; f'(b) < 0$, и найдем точку $c \in (a,\, b)$, в которой $f'(c) = 0$. Поскольку $f'(a) > 0$, то всех точках $x > a$, близких к a, выполняется неравенство $f(x) > f(a)$. Из неравенства $f'(b) < 0$ следует неравенство $f(x) > f(b)$ в близких к b точках $x < b$. Таким образом, $f(a),\; f(b)$ не являются наибольшими значениями функции f на отрезке $[a,\, b]$. По теореме Вейерштрасса функция достигает своего наибольшего значения в некоторой точке c. Из сказанного выше следует, что $c \in (a,\, b)$. По теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Переходя к общему случаю, рассмотрим функцию $g : g(x) = f(x) - C\,x$. По уже доказанному найдется точка c между $a,\, b$, для которой $g'(c) = 0$. Для функции f получаем $f'(c) = C$.

Мы можем сказать, что для производной справедлива теорема о промежуточном значении. Производная не обязана быть непрерывной. Соответствующий пример будет приведен ниже.

§ 2 Теорема Ролля

Теорема 1.

Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,\, b]$, дифференцируема во всех точках интервала $(a,\, b)$, принимает одинаковые значения на концах промежутка: $f(a) = f(b)$.

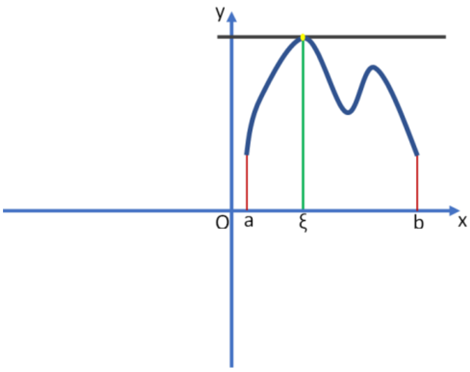
Тогда

$$\exists \xi \in (a,\, b)\;\; f'(\xi) = 0.$$

Доказательство.

Может случиться, что $f = const$, тогда утверждение теоремы очевидно.

В противном случае найдется x, для которого $f(x) \neq f(a)$, например, $f(x) > f(a)$. По теореме Вейерштрасса непрерывная на отрезке функция f достигает в некоторой точке ξ своего наибольшего значения. Ясно, что $f(\xi) > f(a) = f(b)$, так что $\xi \in (a, b)$. Мы оказываемся в условиях теоремы Ферма, из которой получаем требуемое равенство $f'(\xi) = 0$.



Геометрически теорема означает, что в некоторой точке касательная к графику функции горизонтальна.

§ 3. Теорема Лагранжа

Теорема 1.

Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех точках интервала (a, b).

Тогда

$$\exists \xi \in (a, b) \ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Доказательство.

Введем вспомогательную функцию

$$g(x) = f(x) - \lambda x,$$

подобрав число λ так, чтобы $g(a) = g(b)$. Нетрудно видеть, что следует положить

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

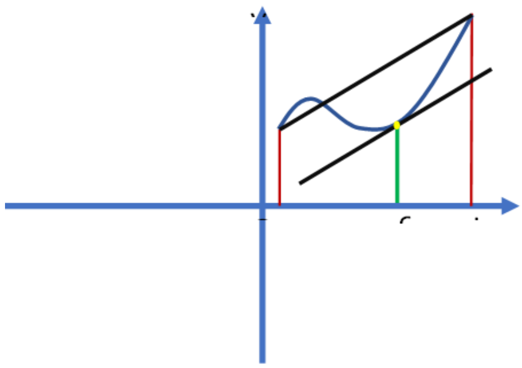
Функция g удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Поэтому

$$\exists \xi \in (a, b) \ g'(\xi) = 0.$$

Возвращаясь к функции f, видим, что

$$f'(\xi) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Геометрически теорема означает, что в некоторой точке касательная графика функции f параллельна хорде, соединяющей концы графика.



Запишем еще теорему Лагранжа в видоизмененных обозначениях. Если функция f непрерывна на отрезке с концами x, $x+\Delta x$ и дифференцируема во внутренних точках этого промежутка, то найдется точка ξ в интервале с концами x, $x+\Delta x$, для которой

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x.$$

Заметим, что точку ξ можно представить в виде

$$\xi = x+\theta\cdot\Delta x, \text{ где } \theta\in(0,1).$$

Итак,

$$\exists\theta\in(0,1)\;\; f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x \;—$$

формула конечных приращений Лагранжа.

Теорема 2. О пределе производной.

Пусть функция f определена и непрерывна на промежутке $[a,\, b)$, дифференцируема во всех точках интервала $(a,\, b)$, $f'(x)\underset{x\to a+0}{\to} A$.

Тогда f имеет в точке a правостороннюю производную

$$f'_+(a)=A,\;\; f'_+(a)=\lim_{x\to a+0} f'(x)=f'(a+0).$$

Доказательство.

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\in(a,\, b)$, $x_n\underset{n\to\infty}{\to} a$. По теореме Лагранжа

$$\forall n\;\exists\xi_n\in(a,\, x_n)\;\; \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}=f'(\xi_n).$$

Получена последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n\underset{n\to\infty}{\to} a$. Поскольку $f'(x)\underset{x\to a+0}{\to} A$, то $f'(\xi_n)\underset{n\to\infty}{\to} A$,

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\underset{n\to\infty}{\to} A.$$

Итак, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\underset{x\to a+0}{\to} A$, f имеет правостороннюю производную $f'_+(a)=A$.

Теорема 2 говорит, что для функции, имеющей производную во всех точках промежутка, производная не может иметь разрывов первого рода. Разрывы второго рода возможны.

Пример.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0,\\ 0,\ x=0.\end{cases}$$

$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ для $x\neq 0$ и $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$. f' не имеет предела в нуле. f' терпит разрыв второго рода.

§ 4 Теорема Коши

Теорема 1.

Пусть функции f, g определены и непрерывны на отрезке $[a,\, b]$, дифференцируемы во всех точках интервала $(a,\, b)$, $\forall x\in(a,\, b)\ g'(x)\neq 0$.

Тогда

$$\exists \xi\in(a,\, b)\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство.

Положим $F=f-\lambda g$, где

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

выбрано так, чтобы $F(a)=F(b)$.

(Заметим, что $g(b)-g(a)\neq 0$ по теореме Ролля)

По теореме Ролля

$$\exists \xi\in(a,\, b)\ F'(\xi)=0.$$

Возвращаясь к рассмотрению функций f, g, получаем

$$f'(\xi)-\lambda g'(\xi)=0,\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$