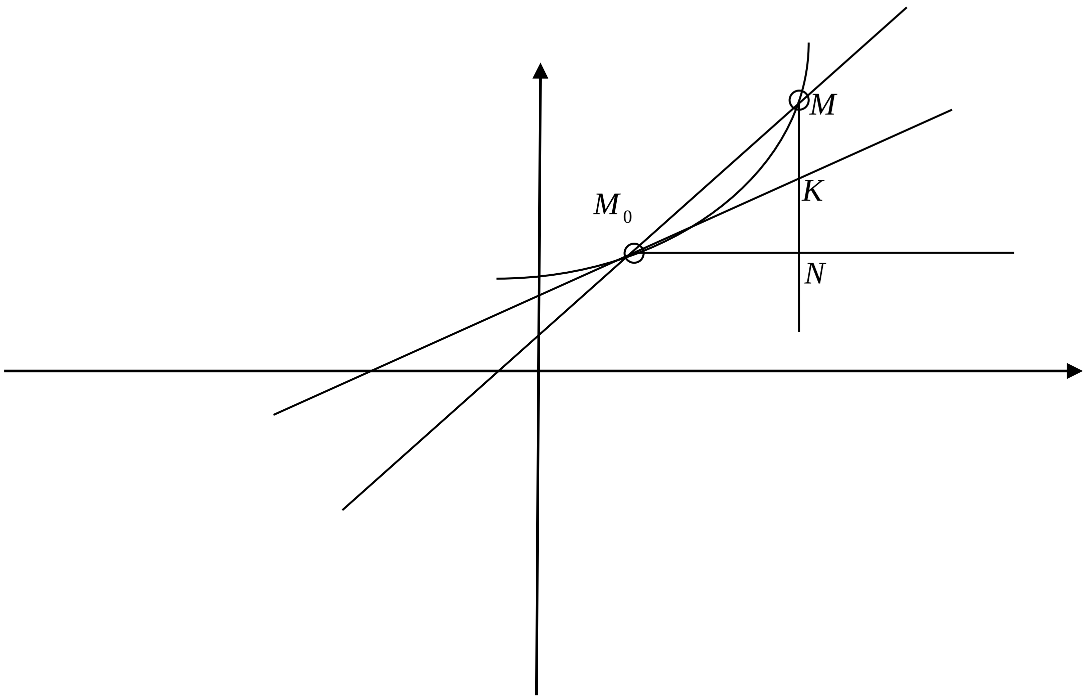
Лекция 17 29.10.2022

§ 7 Механический и геометрический смысл производной и дифференциала

1^0. Пусть $x = x(t)$ — закон движения точки, $x = x(t)$ — координата в момент t точки, движущейся по прямой, тогда $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$ — путь пройденный точкой за период $(t,\ t+\Delta t)$, $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ — средняя скорость за этот период, $x'(t)$ — мгновенная скорость в момент t, $dx = x'(t)dt$ — путь, который точка прошла бы за время dt, если бы двигалась равномерно со скоростью, равной мгновенной скорости в момент t.

2^0. Пусть Γ — график непрерывной функции на отрезке $[a,\ b]$, $M_0(x_0,\ y_0) \in \Gamma,\ y_0 = f(x_0)$, $x \in (a,\ b)$, $M(x,\ f(x))$ — соответствующая точка графика. Прямая M_0M называют секущей графика, она проходит через точку M_0 и имеет угловой коэффициент $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.



Устремим $M \to M_0,\ M \in \Gamma$. Если функция имеет производную в точке x_0, угловой коэффициент имеет эту производную своим пределом. Секущая имеет некоторое предельное положение.

Предельное положение секущей называется касательной. Касательная — это прямая с угловым коэффициентом $f'(x_0)$, проходящая через точку $M_0(x_0,\ f(x_0))$. Уравнение касательной имеет вид

$$y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0).$$

Приращение функции (Δy) — это приращение NM ординаты точки графика функции, соответствующее приращению $\Delta x = M_0 N$ абсциссы. Дифференциал $dy = f'(x)dx$ — приращение NK ординаты точки касательной.

Если l — касательная, то

$$\rho(M,l) \underset{M\in\Gamma, M\to M_0}{=} o(\rho(M,M_0)). \qquad (*)$$

Это следует из представления приращения дифференцируемой функции. Соотношение (*) однозначно определяет прямую l. Мы привели, таким образом, альтернативное определение касательной, основанное на понятии дифференцируемой функции, в отличие от первого описания в терминах производной.

§ 8 Производные и дифференциалы высших порядков

1⁰. Определение

Пусть функция f имеет производную во всех точка некоторой окрестности точки x_0. Положим $\varphi = f' : \varphi(x) = f'(x)$. Если функция φ имеет производную $\varphi'(x_0)$, эту производную называют производной второго порядка функции f в точке x_0 и обозначают

$$f''(x_0) = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Итак, вторая производная — это производная от производной:

$$f''(x_0) = (f')'(x_0).$$

По индукции определяем производные последующих порядков:

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$$ — производная n-го порядка.

Производные обозначают через

$$f',\ f'',\ f''',\ f^{IV},\ f^{V},\ f^{VI}.$$

Если $x = x(t)$ — закон движения точки, то $a = \dfrac{d^2 x}{dt^2}$ — ускорение.

Второй дифференциал — дифференциал дифференциала:

$$d^2 f(x_0, \Delta x) = d\left(df(\ ,\Delta x)\right)(x_0,\Delta x) = f''(x_0)\Delta x^2.$$

Если $y = f(x)$, то $dy = f'(x)dx,\ d^2y = f''(x)dx^2,\ d^3y = f'''(x)dx^3, \ldots$

2^0. Основные свойства производных высших порядков.

1) $\left(f^{(n)}\right)^{(m)} = f^{(n+m)}$.

2) Дифференцирование линейной комбинации.

$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.

3) Формула Лейбница

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Внешне формула Лейбница напоминает бином Ньютона и аналогичным образом доказывается. Произведение двух функций дифффеpенцируется поочередным дифференцированием сомножителей. При вычислении производной n -го порядка мы на каждом из n шагов выбираем для дифференцирования первый или второй сомножитель. Для получения члена вида $f^{(n-k)}g^{(k)}$ следует выбрать второй сомножитель на k шагах из n возможных. Такой выбор реализуется C_n^k способами. Формально доказательство легко проводится по индукции. Правило вычисления производной произведения — база индукции. Проведем индукционный переход.

$$(f \cdot g)^{(n+1)} = \left((f \cdot g)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(n-k+1)} g^{(k)} = f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f\, g^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(n-k+1)} g^{(k)}.$$

3^0. Таблица производных

1) Для $m \in \mathbb{N}$ имеем $\left(x^m\right)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)\,x^{m-n},\ n \le m, \\ 0,\ n > m \end{cases}$

Для других показателей

$$\left(x^\mu\right)^{(n)} = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)\,x^{\mu-n+1}.$$

2) $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right),\ (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.

Действительно,

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ (\sin x)'' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\cdot 2\right),\ldots$$

Заметим еще, что

$$(\sin x)' = \cos x,\ (\sin x)'' = -\sin x,\ (\sin x)''' = -\cos x,\ (\sin x)^{IV} = \sin x;$$
$$(\cos x)' = -\sin x,\ (\cos x)'' = -\cos x,\ (\cos x)''' = \sin x,\ (\cos x)^{IV} = \cos x.$$

4^0. Дифференцирование сложной функции.

Пусть $F(x) = g(f(x))$ — сложная функция. Тогда

$$F'(x) = g'(f(x))\, f'(x),$$
$$F''(x) = g''(f(x))\, f'^2(x) + g'(f(x))\, f''(x)$$

В простейшем случае, где $f(x) = ax + b$ получим.

$$F'(x) = g'(ax+b)\,a,$$
$$F''(x) = g''(ax+b)\,a^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F^{(n)}(x) = g^{(n)}(ax+b)\,a^{(n)}$$

Повторим дифференцирования в терминах дифференциалов. Если $z = g(y),\ y = f(x)$, то

$$dy = g'(y)\,dy,$$
$$d^2y = g''(y)\,dy^2 + g'(y)\,d^2y$$

Наличие второго слагаемого означает нарушение инвариантности формы второго дифференциала. Если $y = ax + b$ — линейная функция, то $d^2y = 0$, $d^{(n)}z = f^{(n)}(y)\,dy^n$, n-й дифференциал остается инвариантным по форме.

§ 9 Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно

1^0. Пусть φ, ψ — непрерывные функции на отрезке $[\alpha, \beta]$. Рассмотрим отображение γ отрезка $[\alpha, \beta]$ в координатную плоскость Oxy, которое переводит $t \in [\alpha, \beta]$ в точку $M(\varphi(t), \psi(t))$. Отображение γ называется путем на плоскости. Образ $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ отрезка $[\alpha, \beta]$ под действием отображения γ — кривая на плоскости. Если эта кривая является графиком некоторой функции f, то говорят, что функция f параметрически задается системой уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Функции $\varphi,\ \psi,\ f$ связаны соотношением

$$\psi = f \circ \varphi : \psi(t) = f\left(\varphi(t)\right),\ t \in [\alpha,\ \beta].$$

В частности, если φ — строго монотонная функция, то $f = \psi \circ \varphi^{-1}$.

Если функции $\varphi,\ \psi$ дифференцируемы в точке $t_0 \in (\alpha,\ \beta)$ и $\varphi'(t_0) \neq 0$, то функция $f = \psi \circ \varphi^{-1}$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ и

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

Действительно, по теореме о производной обратной функции φ^{-1} имеет производную, $\left(\varphi^{-1}\right)'(x_0) = \dfrac{1}{\varphi'(t_0)}$, а по теореме о производной сложной функции имеет производную функция f и справедлива доказываемая формула.

Если предположить, что функции $\varphi,\ \psi$ дважды дифференцируемы в точке t_0, то функция f дважды дифференцируема в точке x_0,

$$f''(x_0) = \frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0) - \psi'(t_0)\varphi''(t_0)}{\left(\varphi'(t_0)\right)^3}.$$

Действительно, $f'(x) = \dfrac{\psi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}$,

$$f''(x_0) = \frac{\psi''(t_0)\dfrac{1}{\varphi'(t_0)}\varphi'(t_0) - \psi'(t_0)\varphi''(t_0)\dfrac{1}{\varphi'(t_0)}}{\left(\varphi'(t_0)\right)^2} = \frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0) - \psi'(t_0)\varphi''(t_0)}{\left(\varphi'(t_0)\right)^3}.$$

В традиционных обозначениях пишут

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}.$$

2^0. Пусть F — функция двух переменных.

Рассмотрим уравнение

$$F(x,\ y)=0.$$

Про функцию

$$y=f(x),\ \ x\in\Delta,$$

удовлетворяющую уравнению в том смысле, что

$$F\big(x,f(x)\big)=0,\ x\in\Delta,$$

говорят, что она неявно задается уравнением.

В некоторых случаях дифференцированием последнего равенства можно найти производную функции f.

Пример

Функцию $y=\sqrt{1-x^2},\ \ x\in(-1,1)$ можно задать параметрически системой уравнений

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t,\ \ t\in(0,\ \pi), \end{cases}$$

и неявно уравнением

$$x^2+y^2=1,\ \ y>0.$$

Явное дифференцирование дает

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \ y''=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}=-\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}.$$

В параметрическом виде

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos t}{\sin t}=-\operatorname{ctg} t,\ \ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sin^2 t}\frac{1}{-\sin t}=-\frac{1}{\sin^3 t}.$$

В неявном виде

$$x+yy'=0,\ \ y'=-\frac{x}{y};$$

$$1+y'^2+yy''=0,\ 1+\frac{x^2}{y^2}+yy''=0,\ x^2+y^2+y^3y''=0,\ 1+y^3y''=0,\ y''=-\frac{1}{y^3}.$$