Лекция 16 25.10.2024

§ 4 Производная обратной функции

Теорема 1

Пусть функция f определена, непрерывна и строго монотонна на интервале (a, b);

$(c, d) = f((a, b))$ $g = f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$; $x_0 \in (a, b)$, а f дифференцируема в точке x_0, $f'(x_0) \neq 0$.

Тогда функция g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$,

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \tag{1}$$

$$dg(x_0) = (df(x_0))^{-1}.$$

Доказательство

Заметим, что по теореме об обращении строго монотонной непрерывной функции функция g строго монотонна и непрерывна на интервале (c, d).

Мы должны показать, что

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \underset{y \to y_0}{\to} \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{2}$$

Возьмем произвольную последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n \in (c, d)$, $y_n \neq y_0$, $y_n \underset{n\to\infty}{\to} y_0$ и положим $x_n = g(y_n)$. Тогда $x_n \in (a, b)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$; $f(x_n) = y_n$.

$$\frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{y_n - y_0} = \frac{1}{\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Дифференциал функции f есть операция умножения на $f'(x_0)$, а дифференциал g — умножение на обратное число $g'(y_0)$. Указанные умножения нейтрализуют друг друга, дифференциалы — взаимно обратные линейные функции.

§ 5 *Дифференцирование сложной функции*

Теорема 1

Пусть f — функция, определенная в окрестности точки x_0 и дифференцируемая в этой точке; g — функция, определенная в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и дифференцируемая в этой точке; $F = g \circ f : F(x) = g(f(x))$.

Тогда F — дифференцируема в точке x_0,

$$F'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0). \tag{1}$$

Доказательство

Мы должны показать, что

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\to} g'(y_0)\, f'(x_0) \tag{2}$$

Запишем приращение функции g в виде

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \beta(\Delta y)\Delta y, \tag{3}$$

где $\beta(0) = 0 = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \beta(\Delta y)$.

Возьмем произвольную последовательность $\{\Delta x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\Delta x_n \underset{n \to \infty}{\to} 0,\ \Delta x_n \neq 0$. Положим

$$\Delta y_n = f(x_0 + \Delta x_n) - f(x_0).$$

Тогда

$$\Delta y_n \underset{n \to \infty}{\to} 0,\ \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \underset{n \to \infty}{\to} f'(x_0) \tag{4}$$

Теперь

$$F(x_0 + \Delta x_n) - F(x_0) = g(f(x_0 + \Delta x_n)) - g(f(x_0)) = g(y_0 + \Delta y_n) - g(y_0).$$

Формула (3) дает нам

$$F(x_0 + \Delta x_n) - F(x_0) = g'(y_0)\Delta y_n + \beta(\Delta y_n)\Delta y_n,$$

$$\frac{F(x_0 + \Delta x_n) - F(x_0)}{\Delta x_n} = \left(g'(y_0) + \beta(\Delta y_n)\right)\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n} \underset{n \to \infty}{\to} \left(g'(y_0) + 0\right) f'(x_0) = g'(y_0)\, f'(x_0).$$

Теорема 2 Об инвариантности формы дифференциала

В условиях теоремы 1 дифференциал композиции равен композиции дифференциалов,

$$dF(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0) \qquad (5)$$

$$dF(x_0,\, \Delta x) = dg\big(y_0,\, df(x_0,\, \Delta x)\big).$$

Доказательство

$$dF(x_0,\, \Delta x) = F'(x_0)\Delta x = g'(y_0)\, f'(x_0)\Delta x = g'(y_0)\, df(x_0,\, \Delta x) = dg\big(y_0,\, df(x_0,\, \Delta x)\big).$$

В традиционных обозначениях

$$z = g(y),\ dz = g'(y)\,dy\,, \qquad (6)$$

dy — дифференциал независимой переменной y .

$$z = g(y),\ y = f(x),\ z = g\big(f(x)\big) = F(x),\ dz = F'(x)dx = g'(y)\, f'(x)dx = g'(y)dy\,, \qquad (7)$$

dy — дифференциал функции $y = f(x)$.

Дифференциал инвариантен по форме — внешне выражения (6) и (7) для dz совпадают.

§ 6 Таблица производных

	$f(x)$	$f'(x)$
1.	C	0
2.	x	1
3.	x^n	$n\,x^{n-1}$
4.	x^μ	$\mu\ x^{\mu-1}$
5.	e^x	e^x
6.	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
7.	$\sin x$	$\cos x$
8.	$\cos x$	$-\sin x$
9.	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$

10.	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
11.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13.	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
14.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Доказательство

Формулы 1–2 не вызывают сомнений.

Третью формулу можем получить индукцией:

$$\left(x^{n+1}\right)' = \left(x^n x\right)' = n\,x^{n-1}x + x^n 1 = n\,x^n + x^n = (n+1)\,x^n .$$

4) $\dfrac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^\mu \dfrac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\Delta x} \underset{\Delta x\to 0}{\to} x^\mu \dfrac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1}$.

5) $\dfrac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \underset{\Delta x\to 0}{\to} e^x \cdot 1 = e^x$.

6) Пусть $f(x) = e^x$, $g = f^{-1} : g(y) = \ln y$. Возьмем произвольную точку y_0, положим $x_0 = g(y_0)$. По теореме о производной обратной функции

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{y_0} .$$

7)
$$\sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$
$$\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \underset{\Delta x\to 0}{\to} \cos x$$

8) $f(x) = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

По теореме о дифференцировании композиции

$$f'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot 1 = -\sin x .$$

9) $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

11) $g(y) = \arcsin y$, $f = g^{-1}$: $f(x) = \sin x$.

Пусть $y_0 \in (-1, 1)$, $x_0 = g(y_0)$, тогда $y_0 = f(x_0) = \sin x_0$.

По теореме о производной обратной функции

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}} .$$