Лекция 15   22.10.2024

Глава IV. Основные понятия дифференциального исчисления

§ 1 Понятие производной

1⁰. Определение

Пусть функция f определена в окрестности точки x_0.

Производной функции f в точке x_0 называется число

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

в случае существования предела.

Формулу (1) можно преобразовать к виду

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x_0,\, h)}{h}.$$

Используются и другие обозначения:

$$y = f(x),\ \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),\ y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Примеры

1) $f(x) = C,\ \Delta f(x_0,\, h) = 0,\ f'(x_0) = 0.$

2) $f(x) = x,\ \Delta f(x_0,\, h) = (x_0 + h) - x_0 = h,\ \dfrac{\Delta f(x_0,\, h)}{h} = 1,\ f'(x_0) = 1.$

3) $f(x) = x^3,$

$$\Delta f(2,\, h) = (2 + h)^3 - 2^3 = 12h + 6h^2 + h^3,\ \frac{\Delta f(2,\, h)}{h} = 12 + 6h + h^2 \underset{h \to 0}{\to} 12,\ f'(2) = 12.$$

2⁰. Односторонние производные

$$f_{\pm}(x_0) = \lim_{x \to x_0 \pm 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{2}$$

Предложение

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists f'_{\pm}(x_0),\ f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0).$$

Пример

$$f(x) = |x|,\ f'_{\pm}(0) = \pm 1,$$

производная не существует.

3^0. Теорема 1

Пусть f имеет конечную производную в точке x_0.

Тогда f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

$$\Delta f(x_0, h) = \frac{\Delta f(x_0, h)}{h} \cdot h \underset{h\to 0}{\to} f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

§ 2. Дифференцируемые функции

Определение

Пусть функция f определена в окрестности точки x_0.

f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует такое число $A \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{aligned} &\Delta f(x_0, h) = A \cdot h + \alpha(h), \\ &\text{где } \alpha(h) = o(h), \text{ т.е. } \frac{\alpha(h)}{h} \underset{h\to 0}{\to} 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Линейная функция

$$df(x_0):\ df(x_0)(h) = A \cdot h$$

называется дифференциалом функции f в точке x_0.

Замечание

Наряду с обозначением $df(x_0)(h)$ можно писать и $df(x_0, h)$

Приращение дифференцируемой функции записывается в виде

$$\Delta f(x_0, h) = df(x_0, h) + \alpha(h),\ \alpha(h) = o(h). \tag{2}$$

Если $A \neq 0$, то $df(x_0)$ — главная часть приращения.

Пример

$$f(x)=x^3,\ x_0=2.$$

$$\Delta f(2,\ h)=12h+6h^2+h^3=12h+o(h),$$

$$df(2,\ h)=12h.$$

Положим

$$\beta(h)=\begin{cases}\dfrac{\alpha(h)}{h},\ h\neq 0,\\ 0,\quad h=0.\end{cases}$$

Для приращения получим представление

$$\begin{aligned}&\Delta f(x_0,\ h)=df(x_0,\ h)+\beta(h)\cdot h,\\ &\beta(0)=0,\ \beta \text{ непрерывна в нуле.}\end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 1.

Пусть f определена в окрестности точки x_0.

Тогда дифференцируемость функции f в точке x_0 равносильна существованию конечной производной $f'(x_0)$. При этом $A=f'(x_0)$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть функция f дифференцируема. Тогда

$$\Delta f(x_0,\ h)=A\cdot h+o(h),\ \frac{\Delta f(x_0,\ h)}{h}=A+\frac{o(h)}{h}\underset{h\to 0}{\to}A+0=A,$$

функция f имеет производную $f'(x_0)=A$.

Достаточность. Приращение можно записать в виде

$$\Delta f(x_0,\ h)=f'(x_0)\cdot h+\alpha(h),$$

где

$$\alpha(h)=\Delta f(x_0,\ h)-f'(x_0)\cdot h,$$

при этом получается, что

$$\frac{\alpha(h)}{h}=\frac{\Delta f(x_0,\ h)}{h}-f'(x_0)\underset{h\to 0}{\to}f'(x_0)-f'(x_0)=0,\ \alpha(h)=o(h),$$

функция f дифференцируема.

В "традиционных обозначениях"

$$y=f(x),\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x),\ \Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x),$$

$$dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx \text{ — дифференциал.}$$

§ 3. Дифференцирование суммы, произведения, частного

Теорема 1. Дифференцирование суммы

Пусть f, g — функции, заданные в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируемые в этой точке; $F=f+g$.

Тогда функция F дифференцируема в точке x_0,

$$F'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0), \tag{1}$$

$$dF(x_0)=df(x_0)+dg(x_0). \tag{2}$$

Доказательство

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\underset{x\to x_0}{\to} f'(x_0)+g'(x_0).$$

Функция F дифференцируема, производная вычисляется по формуле (1).

Теорема 2. Дифференцирование произведения

Пусть f, g — функции, заданные в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируемые в этой точке; $G=f\cdot g$.

Тогда функция G дифференцируема в точке x_0,

$$G'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0), \tag{3}$$

$$dG(x_0)=df(x_0)g(x_0)+f(x_0)dg(x_0). \tag{4}$$

Доказательство

$$G(x)-G(x_0)=f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)=f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)=$$
$$=\big(f(x)-f(x_0)\big)g(x)+f(x_0)\big(g(x)-g(x_0)\big)$$

$$\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Заметив, что функция g, будучи дифференцируемой, непрерывна, $g(x) \underset{x\to x_0}{\to} g(x_0)$, приходим к выводу

$$\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} \underset{x\to x_0}{\to} f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0).$$

Функция G дифференцируема, производная вычисляется по формуле (3).

$$\begin{aligned} &dG(x_0,h)=G'(x_0)h=\left(f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\right)h= \\ &= f'(x_0)h\,g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)h=df(x_0,h)g(x_0)+f(x_0)dg(x_0,h) \end{aligned}$$

Следствие. Дифференцирование линейной комбинации

Пусть f, g — функции, заданные в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируемые в этой точке; $G=\alpha f+\beta g$.

Тогда функция G дифференцируема в точке x_0,

$$G'(x_0)=\alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0), \tag{5}$$

Теорема 3. Дифференцирование частного

Пусть f, g — функции, заданные в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируемые в этой точке, $g(x_0)\neq 0$; $H=\dfrac{f}{g}$.

Тогда функция H дифференцируема в точке x_0,

$$H'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}. \tag{6}$$

Доказательство

$$H(x)-H(x_0)=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$

$$\frac{H(x)-H(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{g(x)}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\frac{f(x_0)}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{H(x)-H(x_0)}{x-x_0}\underset{x\to x_0}{\to}\frac{1}{g(x_0)}f'(x_0)-\frac{f(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}g'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}$$