§ 7. Различные формы ряда Фурье

1^0.Функции периода $2l$.

Пусть f — функция периода $2l$, абсолютно интегрируемая на периоде.
Тригонометрический ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

называется рядом Фурье $2l$-периодической функции f.

2^0. Непериодические функции

Пусть f — функция, определенная на промежутке $[a,\ a+2\pi)$, абсолютно интегрируемая.
Продолжим эту функцию до 2π-периодической функции f^*. Ряд Фурье функции f^*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

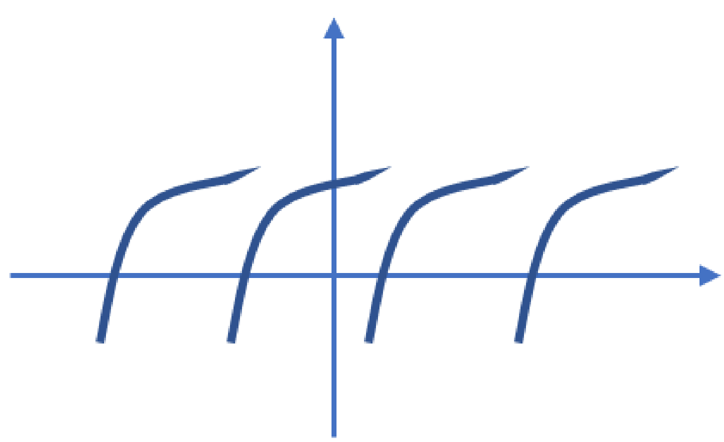
называется рядом Фурье функции f на промежутке $[a,\ a+2\pi)$. Для коэффициентов можно написать формулы

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ n = 0,1,2,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n = 1,2,\ldots,$$

в которых используется только исходная функция.
Условия сходимости получаются из приведенных ранее теорем. Например, если f имеет в точке $x \in (a,\ a+2\pi)$ производную, то ряд Фурье сходится к сумме $f(x)$.
Сходимость ряда в точке a можно гарантировать если существуют $f^{*\prime}_{\pm}(a)$, т.е. существуют $f'_{+}(a),\ f'_{-}(a+2\pi)$. При этом сумма ряда оказывается равной

$$\frac{f(a+0)+f(a+2\pi-0)}{2}.$$



умма ряда Фурье — 2π-периодическая функция.
Построения можно повторить для $2l$-периодической функции.

3^0. Ряды Фурье четных и нечетных функций

Четная функция f разлагается в ряд Фурье по косинусам,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\; b_n = 0,$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Нечетная функция f разлагается в ряд Фурье по синусам,

$$a_n = 0,\; b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

4^0. Разложения только по синусам и только по косинусам

Пусть функция f определена на $[0,\ \pi]$.

а) Продолжим функцию на $[-\pi,\ 0]$ четным образом, т.е. введем в рассмотрение функцию

$$f_1 : f_1(x) = f(|x|),\; x \in [-\pi,\ \pi].$$

Для функции f_1 строим ряд Фурье. Этот ряд содержит только косинусы и называется рядом Фурье функции f по косинусам:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

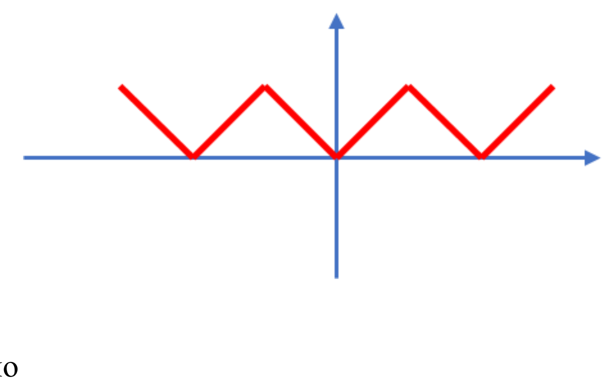
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Если предположить, что f непрерывно дифференцируема, то

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,\; x \in [0,\ \pi].$$

Некоторое сомнение вызывают только точки $0,\ \pi$. В точке 0 функция f_1 непрерывна и имеет односторонние производные. Для обоснования сходимости в точке π заметим, что функция, полученная периодическим продолжением функции f_1, непрерывна и имеет односторонние производные в точке π.

Пример. $f(x) = x,\; x \in [0, \pi]$.



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n \text{ нечетно} \\ 0, & n \text{ четно} \end{cases}$$

$$x=\frac{\pi}{2}-4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2},\ x\in[0,\pi].$$

б) Продолжим функцию на $(-\pi,\ 0)$ нечетным образом, т.е. введем в рассмотрение функцию

$$f_2 : f_2(x)=\begin{cases} f(x),\ x\in(0,\ \pi), \\ -f(-x),\ x\in(-\pi,\ 0). \end{cases}.$$

Для функции f_2 строим ряд Фурье. Этот ряд содержит только синусы и называется рядом Фурье функции f по синусам:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx.$$

Если предположить, что f непрерывно дифференцируема, то

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx,\ x\in(0,\ \pi).$$

Непосредственное вычисление показывает, что в точках $0,\ \pi$ ряд имеет нулевую сумму. Тот же результат получается и применением общих теорем. Например, в точке π должна получиться сумма

$$\frac{f_2(-\pi+0)+f_2(\pi-0)}{2}=\frac{-f(\pi-0)+f(\pi-0)}{2}=0.$$