

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}^{n-1} = x^n, \\ \dot{x}^n = f(t, x^1, \dots, x^n) \end{cases} \quad (5)$$

Если функция $x = \varphi(t)$ — решение уравнения, то набор $(\varphi, \dot{\varphi}, \dots, \varphi^{(n-1)})$ — решение системы; если $(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ — решение системы, то φ^1 — решение уравнения.

5⁰. Метод исключения. При некоторых дополнительных условиях систему удастся свести к одному уравнению. Рассмотрим для простоты систему третьего порядка.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y, z), \\ \dot{y} = g(t, x, y, z), \\ \dot{z} = h(t, x, y, z). \end{cases}$$

Дифференцирование первого уравнения дает

$$\ddot{x} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial f}{\partial z} h, \text{ т.е.}$$

$$\ddot{x} = G(t, x, y, z)$$

Повторное дифференцирование приводит к уравнению

$$\ddot{x} = H(t, x, y, z) \quad (6)$$

При некоторых дополнительных условиях система

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y, z), \\ \ddot{x} = G(t, x, y, z) \end{cases} \quad (7)$$

равносильна системе

$$\begin{cases} y = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}), \\ z = q(t, x, \dot{x}, \ddot{x}). \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя выражения (8) в уравнение (6), получаем дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = \Phi(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad (9)$$

третьего порядка.

Имея решение уравнения (9), решение системы строим с помощью соотношений (8).

§ 2. Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = a_1^1(t)x^1 + \dots + a_n^1(t)x^n + f^1(t), \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}^n = a_1^n(t)x^1 + \dots + a_n^n(t)x^n + f^n(t), \end{cases} \quad (1)$$

$a_1^1, \dots, a_n^n; f^1, \dots, f^n$ непрерывны на интервале (α, β) .

Система

Доказательство. Линейная зависимость функций означает линейную зависимость столбцов матрицы. Поэтому определитель равен нулю.

Предложение 3. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — решения системы (1), $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $W(t_0) = 0$.

Тогда $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно зависимы.

Доказательство. Пусть $W(t_0) = 0$, тогда столбцы определителя $W(t_0)$ линейно зависимы, найдется такой ненулевой набор чисел $\lambda^1, \dots, \lambda^n$, что $\lambda^1 \varphi_1(t_0) + \dots + \lambda^n \varphi_n(t_0) = 0$. Функция $\varphi = \lambda^1 \varphi_1 + \dots + \lambda^n \varphi_n$ является решением задачи Коши с нулевым начальным условием в точке t_0 . По теореме единственности $\varphi = 0$, функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно зависимы.

Альтернатива Вронского. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — решения системы (1).

Тогда

$$\forall t \in (\alpha, \beta) \quad W(t) = 0 \quad \text{или} \quad \forall t \in (\alpha, \beta) \quad W(t) \neq 0.$$

Формула Лиувилля. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — решения системы (1), W — определитель Вронского.

Тогда

$$W(t) = W(t_0) e^{P(t)}, \quad (2)$$

где $P(t)$ — первообразная для следа $\text{tr}(A(t)) = \sum_{k=1}^n a_k^k(t)$ матрицы A , $P(t) = \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds$.

Доказательство.

Производная $\dot{W}(t)$ записывается в виде суммы n определителей, в каждом из которых дифференцированию подвергнута одна строка. Рассмотрим, например первый из определителей

$$\begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1^1(t) \cdots \dot{\varphi}_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) \cdots \varphi_n^2(t) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_1^n(t) \cdots \varphi_n^n(t) \end{vmatrix}$$

В этом определителе первая строка в силу системы (1) является линейной комбинацией строк определителя Вронского (с коэффициентами $a_1^1(t), \dots, a_n^1(t)$). Пользуясь линейностью определителя по строке, мы можем записать этот определитель в виде суммы n слагаемых:

$$a_1^1(t) \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) \cdots \varphi_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) \cdots \varphi_n^2(t) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_1^n(t) \cdots \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} + a_2^1(t) \begin{vmatrix} \varphi_1^2(t) \cdots \varphi_n^2(t) \\ \varphi_1^2(t) \cdots \varphi_n^2(t) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_1^n(t) \cdots \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} + \dots + a_n^1(t) \begin{vmatrix} \varphi_1^n(t) \cdots \varphi_n^n(t) \\ \varphi_1^2(t) \cdots \varphi_n^2(t) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_1^n(t) \cdots \varphi_n^n(t) \end{vmatrix}.$$

Первое слагаемое равно $a_1^1(t) W(t)$, а остальные оказываются нулями, поскольку определители содержат две одинаковые строки.

Повторив рассуждение для остальных слагаемых, мы получим формулу

$$\dot{W}(t) = (a_1^1(t) + \dots + a_n^n(t)) W(t), \quad \dot{W}(t) = \text{tr}(A(t)) W(t).$$

Проведенные вычисления можно представить одной строкой:

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \dots\dots\dots \\ \varphi_1^{i-1}(t) \cdots \varphi_n^{i-1}(t) \\ \dot{\varphi}_1^i(t) \cdots \dot{\varphi}_n^i(t) \\ \varphi_1^{i+1}(t) \cdots \varphi_n^{i+1}(t) \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j^i \begin{vmatrix} \dots\dots\dots \\ \varphi_1^{i-1}(t) \cdots \varphi_n^{i-1}(t) \\ \varphi_1^j(t) \cdots \varphi_n^j(t) \\ \varphi_1^{i+1}(t) \cdots \varphi_n^{i+1}(t) \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i^i W(t) = \text{tr}(A(t))W(t)$$

Определитель Вронского — решение линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка $\dot{z} = \text{tr}(A(t))z$. Справедлива формула (2).

Предложение 4. Пространство решений системы (1) n -мерно.

Доказательство. Выберем $t_0 \in (\alpha, \beta)$. По теореме существования и единственности система (1) имеет решения $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, удовлетворяющие начальным условиям $\varphi_1(t_0) = e_1, \dots, \varphi_n(t_0) = e_n$ (здесь e_1, \dots, e_n — канонический базис пространства \mathbb{R}^n). Эти решения образуют линейно независимую систему. Размерность пространства решений не меньше n . Пусть φ — произвольное решение, тогда $\varphi - \varphi^1(t_0)\varphi_1 - \dots - \varphi^n(t_0)\varphi_n$ — решение задачи Коши с нулевым начальным условием. По теореме единственности $\varphi = \varphi^1(t_0)\varphi_1 - \dots - \varphi^n(t_0)\varphi_n$, φ — линейная комбинация $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Размерность пространства решений не больше n . $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — базис пространства решений.

Определение. Базис пространства решений называется фундаментальной системой решений (ФСР).

ФСР, построенная в Предложении 2, называется ФСР, нормированной в точке t_0 .

Теорема 1. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — ФСР системы (1).

Тогда формула

$$x = C^1 \varphi_1(t) + \dots + C^n \varphi_n(t). \quad (3)$$

дает общее решение системы (1).

При любых C^1, \dots, C^n функция $C^1 \varphi_1 + \dots + C^n \varphi_n$ — решение, и все решения так представляются.

Определение. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — ФСР системы (1). Рассмотрим матрицу $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, составленную из столбцов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Эта матрица называется фундаментальной матрицей системы (1).

Теперь общее решение можно записать в виде

$$x(t) = \Phi(t)C, \quad (4)$$

где C — произвольный столбец.

Заметим, что для фундаментальной матрицы справедливо соотношение

$$\dot{\Phi} = A\Phi.$$

Φ — невырожденная матрица, удовлетворяющая уравнению (1).

§ 4. Линейная неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

1⁰. Теорема 1. Общее решение

Мы рассматриваем линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \quad (1)$$

и соответствующую ей линейную однородную систему

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2)$$

Если ψ_0 – решение (1), а φ — решение (2), то $\psi = \psi_0 + \varphi$ — решение (1); если ψ_0, ψ — решения (1), то $\varphi = \psi - \psi_0$ — решение (2). Мы можем сказать, что формула $\psi = \psi_0 + \varphi$ дает общий вид решения линейной неоднородной системы.

Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — фундаментальная система решений системы (2), а ψ_0 – решение (1), то формула

$$x = \psi_0(t) + C^1 \varphi_1(t) + \dots + C^n \varphi_n(t) \quad (3)$$

дает общее решение линейной неоднородной системы (1).

Доказательство.

1) Если ψ_0 – решение (1), а φ — решение (2), то

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \dot{\varphi} = A\psi_0 + f + A\varphi = A(\psi_0 + \varphi) + f = A\psi + f,$$

ψ — решение (1).

2) Если ψ_0, ψ — решения (1), а $\varphi = \psi - \psi_0$, то

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} - \dot{\psi}_0 = (A\psi + f) - (A\psi_0 + f) = A(\psi - \psi_0) = A\varphi,$$

φ — решение линейной однородной системы.

Из доказанных утверждений видно, что любая функция, полученная по формуле (3) — решение линейной неоднородной системы; наоборот, любое решение ψ записывается в виде $\psi = \psi_0 + \varphi$, а φ , в свою очередь, записывается в виде $\varphi = C^1 \varphi_1 + \dots + C^n \varphi_n$, так что ψ получается по формуле (3).

2⁰. Метод вариации произвольных постоянных.

Если $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — фундаментальная система решений системы (2), то решение линейной неоднородной системы (1) можно найти по формуле

$$\psi = C^1(t) \varphi_1(t) + \dots + C^n(t) \varphi_n(t), \text{ где} \quad (4)$$

функции C^1, \dots, C^n находятся из системы линейных уравнений

$$\dot{C}^1 \varphi_1 + \dots + \dot{C}^n \varphi_n = f. \quad (5)$$

Действительно,

$$\dot{\psi} = C^1 \dot{\varphi}_1 + \dots + C^n \dot{\varphi}_n + \dot{C}^1 \varphi_1 + \dots + \dot{C}^n \varphi_n = C^1 A \varphi_1 + \dots + C^n A \varphi_n + f = A\psi + f,$$

ψ — решение системы (1).

§ 5. Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

1⁰. Линейная однородная система. Случай характеристического многочлена с простыми корнями.

$$\dot{x} = Ax, \quad A — \text{комплексная матрица.} \quad (1)$$

Предложение 1.

$x = Ue^{\lambda_0 t}$, $U \neq 0$ — решение системы (1) $\Leftrightarrow \lambda_0$ — собственное число, U — собственный вектор матрицы A .

Доказательство.

$x = Ue^{\lambda_0 t}$, $U \neq 0$ — решение системы (1) $\Leftrightarrow \lambda_0 Ue^{\lambda_0 t} = AUe^{\lambda_0 t} \Leftrightarrow AU = \lambda_0 U \Leftrightarrow \lambda_0$ — собственное число, U — собственный вектор матрицы A .

Теорема 1.

Пусть A имеет n различных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, U_1, \dots, U_n — соответствующие собственные векторы.

Тогда функции

$$U_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, U_n e^{\lambda_n t} \quad (2)$$

образуют ФСР системы (1).

Доказательство.

По предложению 1 функции совокупности (2) являются решениями системы (1). Проверим линейную независимость. Проведем индукцию по n . При $n = 1$ линейная независимость обеспечена отличием собственного вектора от нуля. Допустим, линейная независимость установлена для совокупности, включающей n функций. Рассмотрим совокупность из $n + 1$ функций. Допустим, линейная комбинация этих функций с коэффициентами $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \alpha^{n+1}$ оказалась нулевой функцией:

$$\alpha^1 U_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha^2 U_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha^n U_n e^{\lambda_n t} + \alpha^{n+1} U_{n+1} e^{\lambda_{n+1} t} = 0. \quad (3)$$

Тогда

$$\alpha^1 U_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})t} + \alpha^2 U_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_{n+1})t} + \dots + \alpha^n U_n e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})t} + \alpha^{n+1} U_{n+1} = 0.$$

Дифференцирование дает равенство

$$\alpha^1 U_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})t} + \alpha^2 U_2 (\lambda_2 - \lambda_{n+1}) e^{(\lambda_2 - \lambda_{n+1})t} + \dots + \alpha^n U_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})t} = 0.$$

По индукционному предположению $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$; соотношение (3) сводится к

$\alpha^{n+1} U_{n+1} e^{\lambda_{n+1} t} = 0$, так что и $\alpha^{n+1} = 0$. Линейная комбинация функций (2) оказывается нулевой только при нулевых коэффициентах, функции (2) линейно независимы.

Замечание. ФСР из функций вида $Ue^{\lambda t}$ можно построить и в том случае, если матрица имеет кратные корни, но каждому собственному числу отвечает столько линейно независимых собственных векторов, какова кратность собственного числа.

В такой ситуации в пространстве \mathbb{R}^n существует базис из собственных векторов матрицы A , матрица A подобна диагональной матрице, т.е. существует такая невырожденная матрица K , что $B = K^{-1}AK$ — диагональная матрица. Выполним в (1) замену переменной по формуле

$$x = Ky: \quad (4)$$

$$K\dot{y} = AKy, \quad \dot{y} = K^{-1}AKy,$$

$$\dot{y} = By. \quad (5)$$

В координатах система (5) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \lambda_1 y^1, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}^n = \lambda_n y^n. \end{cases} \quad (6)$$

Система распадается на отдельные уравнения и легко интегрируется:

$$\begin{cases} y^1 = C^1 e^{\lambda_1 t}, \\ \dots\dots\dots \\ y^n = C^n e^{\lambda_n t}. \end{cases} \quad (7)$$

Формулы (7) дают общее решение системы (6), а преобразование (4) приводит к общему решению (1).

При решении конкретных задач можно не проводить явное приведение системы к диагональному виду, а построить ФСР в форме (2), взяв максимальную линейно независимую систему собственных векторов для каждого собственного числа матрицы A .

2⁰. Линейная однородная система. Случай характеристического многочлена с кратными корнями.

Приведем матрицу к форме Жордана:

$$B = K^{-1}AK \text{ — жорданова матрица.} \quad (8)$$

Замена (4) дает систему (5), которая распадается на несколько систем, имеющих своими матрицами жордановы клетки. Рассмотрим одну из таких систем.

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \lambda y^1, \\ \dot{y}^2 = y^1 + \lambda y^2, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}^k = y^{k-1} + \lambda y^k. \end{cases} \quad (9)$$

Интегрирование дает общее решение

$$\begin{cases} y^1 = C^1 e^{\lambda t}, \\ y^2 = C^1 t e^{\lambda t} + C^2 e^{\lambda t}, \\ \dots\dots\dots \\ y^k = C^1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} + \dots + C^k e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (10)$$

ФСР системы (9) состоит из функций

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \frac{t^2}{2!} \\ \dots \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \\ \dots \\ \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \quad (11)$$

Объединяя ФСР систем вида (9), мы получаем ФСР

$$\psi^1, \dots, \psi^n$$

системы (5).

Функции

$$\varphi^1 = K\psi^1, \dots, \varphi^n = K\psi^n \quad (12)$$

образуют ФСР системы (1).

Явно приводить матрицу к форме Жордана не обязательно. Можно заметить, что ФСР (12) состоит из функций вида

$$U(t)e^{\lambda t},$$

где λ — собственное число матрицы A , U — столбец из многочленов, степени которых не превосходят $k-1$ (k — кратность собственного числа) Указанную оценку можно уточнить, степени многочленов не превзойдут порядка соответствующей жордановой клетки.

Для получения ФСР следует построить достаточное число линейно независимых решений указанного вида. Можно начать с построения решений вида $Ue^{\lambda t}$, U — собственный вектор,

затем построить решения $(Ut+V)e^{\lambda t}$, $(Ut^2+Vt+W)e^{\lambda t}$ и т. д. до получения требуемого числа решений.

3⁰. Построение вещественной ФСР.

Сосредоточимся на рассмотрении вещественных систем. Вещественная матрица может иметь невещественные собственные числа. Поэтому предложенная процедура приводит нас к ФСР, в которой могут присутствовать невещественные функции. Если система

$$\dot{x} = Ax$$

с вещественными коэффициентами имеет комплексное решение φ , то решениями являются и $\operatorname{Re} \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$. Можно считать, что ФСР включает в себя вместе с φ и функцию $\bar{\varphi}$, так что пара функций $\operatorname{Re} \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$ заменяет пару φ , $\bar{\varphi}$. Операция овеществления сохраняет число функций, причем старая и новая системы являются линейными комбинациями друг для друга:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \varphi &= \frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi}), \quad \operatorname{Im} \varphi = \frac{1}{2i}(\varphi - \bar{\varphi}); \\ \varphi &= \operatorname{Re} \varphi + i \operatorname{Im} \varphi, \quad \bar{\varphi} = \operatorname{Re} \varphi - i \operatorname{Im} \varphi.\end{aligned}$$

Получаемая вещественная совокупность тоже окажется ФСР.

Заметим, что достаточно построить решения, отвечающие одному из собственных чисел λ , $\bar{\lambda}$ и выделить вещественные и мнимые части этих решений.

4⁰. Линейная неоднородная система.

Вопрос интегрирования линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = Ax + f(t) \tag{13}$$

принципиально решается методом вариации произвольных постоянных, но для систем со свободными членами специального вида удобнее пользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Если

$$f(t) = M_l(t)e^{\lambda_0 t},$$

где $M_l(t)$ — столбец из многочленов степени не выше l , можно попытаться найти решение в виде

$$x = S_l(t)e^{\lambda_0 t}, \tag{14}$$

где $S_l(t)$ — столбец из многочленов степени не выше l . Возможность такого построения гарантируется, если λ_0 не является собственным числом матрицы A . Если же λ_0 — собственное число кратности k , то может потребоваться повышение степени многочленов, но не более чем на k единиц, можно найти решение в виде

$$x = S_{l+k}(t)e^{\lambda_0 t}. \tag{15}$$

Убедимся в возможности найти решение в форме (14) или (15).

Замена переменных $x = Ky$ сводит систему (13) к системе с жордановой матрицей

$$\dot{y} = By + g(t). \tag{16}$$

Последняя система распадается на системы с жордановыми клетками. Рассмотрим одну из таких систем

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \lambda y^1 + N_l^1(t) e^{\lambda_0 t}, \\ \dot{y}^2 = y^1 + \lambda y^2 + N_l^2(t) e^{\lambda_0 t}, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}^k = y^{k-1} + \lambda y^k + N_l^k(t) e^{\lambda_0 t}. \end{cases}$$

Предположим, что $\lambda_0 \neq \lambda$. Первое уравнение имеет решение вида $y^1 = T_l^1(t) e^{\lambda_0 t}$. Подставив, это выражение во второе уравнение, получаем уравнение

$$\dot{y}^2 = \lambda y^2 + \tilde{N}_l^2(t) e^{\lambda_0 t}$$

с решением вида $y_2 = T_l^2(t) e^{\lambda_0 t}$, и т.д. Получается решение вида $y = T_l(t) e^{\lambda_0 t}$.

Если $\lambda_0 = \lambda$, то первое уравнение имеет решение вида $y_1 = t T_l^1(t) e^{\lambda_0 t}$. Подставив, это выражение во второе уравнение, получаем уравнение

$$\dot{y}^2 = \lambda y^2 + \tilde{N}_{l+1}^2(t) e^{\lambda_0 t}$$

с решением вида $y^2 = t T_{l+1}^2(t) e^{\lambda_0 t}$, и т.д. Получается решение вида $y = T_{l+k}(t) e^{\lambda_0 t}$.

Возвращаясь к старым переменным ($x = Ky$), получаем решение вида (14) или (15) системы (13).

Для вещественной системы

$$\dot{x} = Ax + e^{\alpha t} (M_l(t) \cos \beta t + N_m(t) \sin \beta t) \quad (17)$$

решение можно найти в виде

$$x = e^{\alpha t} (S_\nu(t) \cos \beta t + T_\nu(t) \sin \beta t), \quad (\nu = \max\{l, m\}), \quad (18)$$

если $\alpha \pm i\beta$ не являются с.ч. матрицы A , и в виде

$$x = e^{\alpha t} (S_{\nu+k}(t) \cos \beta t + T_{\nu+k}(t) \sin \beta t), \quad (19)$$

если $\alpha \pm i\beta$ — с.ч. кратности k для матрицы A .

(Рассмотрим систему $\dot{x} = Ax + e^{(\alpha+i\beta)t} (M_l(t) - iN_m(t))$). По доказанному система имеет

решение вида $x = U_{l+k}(t) e^{(\alpha+i\beta)t}$. Вещественная часть этого решения имеет вид (19) и служит решением для (17).

5⁰. Примеры.

Пример 1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Эта матрица имеет собственные числа $\lambda_{1,2,3} = 1$.

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = Ax \quad (20)$$

Алгебраическая система $AU = U$, или $BU = 0$, где $B = A - E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, имеет с

точностью до числового множителя единственное решение $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ — собственный вектор матрицы A , Ue^t — решение системы (20).

Дополнительное решение ищем в виде

$$x = (Ut + V)e^t.$$

Подстановка в систему дает

$$Ut + V + U = A(Ut + V),$$

$$BU = 0; BV = U.$$

Можем взять $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Функция $(Ut + V)e^t = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^t$ — решение системы.

Третье решение найдем в виде

$$x = (Ut^2 + 2Vt + W)e^t:$$

$$(Ut^2 + 2Vt + W + 2Ut + 2V)e^t = A((Ut^2 + 2Vt + W)e^t);$$

$$BU = 0; BV = U; BW = 2V$$

Полагаем $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Функция $\begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^2 + 1 \\ 2t + 2 \end{pmatrix} e^t$ — решение системы.

Решения $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$, $\begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^t$, $\begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^2 + 1 \\ 2t + 2 \end{pmatrix} e^t$ образуют ФСР, формула

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^2 + 1 \\ 2t + 2 \end{pmatrix} e^t$$

дает общее решение линейной однородной системы (20).

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \quad (21)$$

Следует попытаться найти решение в виде $x = Se^t$. Для отыскания столбца S получаем

систему $BS = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, не имеющую решений.

Ищем решение в виде $x = (Pt^3 + Qt^2 + Rt + S)e^t$.

Для столбцов P, Q, R, S должны выполняться условия

$$BP = 0, BQ = 3P, BR = 2Q, BS = R + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмем $P = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, R = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, для отыскания столбца S получаем систему

$$BS = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3\alpha \\ 6\alpha \end{pmatrix}. \text{ Система оказывается совместной только при } \alpha = 1, \text{ решением}$$

$$\text{является, например, столбец } S = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Построено решение $\begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^3 + 3t + 3 \\ 3t^2 + 6t + 9 \end{pmatrix} e^t$ для системы (21).

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 2 \cos t + 14 \sin t \\ 3 \cos t + 2 \sin t \\ -4 \cos t - 8 \sin t \end{pmatrix} \quad (22)$$

Решение ищем в виде $x = P \cos t + Q \sin t$. Подстановкой в (22) получаем

$$-P \sin t + Q \cos t = AP \cos t + AQ \sin t + \begin{pmatrix} 2 \cos t + 14 \sin t \\ 3 \cos t + 2 \sin t \\ -4 \cos t - 8 \sin t \end{pmatrix}$$

$$Q = AP + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad -P = AQ + \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$-P = A \left(AP + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad -P = A^2 P + A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, то для отыскания столбца P получаем

систему

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = 0,$$

решением которой является столбец $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Формула $Q = AP + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ дает $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Система (22) имеет решение $x = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2 \cos t + 3 \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2,3} = 2,$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, x_3 = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} e^{2t} — \text{ФСР системы } \dot{x} = Ax.$$

Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} -3 \cos t - 2 \sin t \\ -3 \sin t \\ -2 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}$ имеет решение $x = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 7 & 6 & -5 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \lambda_{1,2,3} = 3, B = A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BU = 0 \text{ для } U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; BV = U \text{ для } V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ для } BW = V, W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = Ue^{3t}, x_2 = (Ut + V)e^{3t}, x_3 = (Ut^2 + 2Vt + 2W)e^{3t} — \text{ФСР системы } \dot{x} = Ax.$

Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$ имеет решение $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$. Система $\dot{x} = Ax - \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} e^{3t}$ имеет решение

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$. Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} e^{3t}$ имеет решение $x = \left(2Ut^3 + 6Vt^2 + 12Wt + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{3t}.$

Пример 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 2 \pm 2i.$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^{2t}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} e^{2t} \text{ — ФСР системы } \dot{x} = Ax.$$

Пример 6.

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 36 & -5 \\ -10 & 22 & -3 \\ -10 & 20 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm i$$

$$\begin{cases} x = 2e^{2t} \\ y = e^{2t} \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^t (9 \cos t + 2 \sin t) \\ y = 5e^t \cos t \\ z = e^t (5 \cos t - 5 \sin t) \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^t (9 \sin t - 2 \cos t) \\ y = 5e^t \sin t \\ z = e^t (5 \sin t + 5 \cos t) \end{cases} \text{ — ФСР системы } \dot{x} = Ax.$$

Пример 7.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = 1$$

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 4t-1 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} e^t \text{ — общее решение системы } \dot{x} = Ax.$$

Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ имеет решение $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Система $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$ имеет решение

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t. \text{ Система } \dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \text{ имеет решение } x = \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} e^t. \text{ Система } \dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

имеет решение $x = \begin{pmatrix} 4t^2 - 2t \\ 2t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} e^t.$