

# Глава V. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

## § 1. Основные определения

### 1<sup>0</sup>. Определение

Система вида

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(t, x^1, \dots, x^n), \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(t, x^1, \dots, x^n), \end{cases} \quad (1)$$

где  $f^1, \dots, f^n$  — непрерывные функции в области  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , называется нормальной системой  $n$ -го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений.

(Здесь верхние индексы нумеруют компоненты вектора, столбца. Верхние индексы сейчас не являются показателями степени).

Набор функций

$$x^1 = \varphi^1(t), \dots, x^n = \varphi^n(t); t \in (\alpha, \beta)$$

называется решением системы (1), если он этой системе удовлетворяет, т.е.

1) функции  $\varphi^1, \dots, \varphi^n$  непрерывно дифференцируемы,

2)  $\forall t \in (\alpha, \beta) (\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)) \in G$ ,

3)  $\forall t \in (\alpha, \beta) \dot{\varphi}^k(t) = f^k(t, \varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)), k = 1, \dots, n$ .

Представляется удобным ввести векторную запись системы (1). Пусть

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$$

отображение с координатными функциями  $f^1, \dots, f^n$ ,  $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\dot{x} = (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ ,

тогда система (1) принимает вид

$$\dot{x} = f(t, x), (t, x) \in G. \quad (2)$$

Решение системы (2) — это непрерывно дифференцируемая вектор-функция

$x = \varphi(t)$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$ , удовлетворяющая системе (уравнению) (2):

$$\forall t \in (\alpha, \beta) \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)).$$

2<sup>0</sup>. Задача Коши состоит в построении решения уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию

$$x|_{t_0} = x_0 \quad (3)$$

$((t_0, x_0) \in G)$ .

### 3<sup>0</sup>. Теорема существования и единственности.

Пусть отображение  $f$  непрерывно дифференцируемо.

Тогда задача Коши для системы (2) с начальным условием (3) имеет единственное решение.

### 4<sup>0</sup>. Сведение дифференциального уравнения $n$ -го порядка к нормальной системе.

Дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (4)$$

равносильно нормальной системе

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dots \\ \dot{x}^{n-1} = x^n, \\ \dot{x}^n = f(t, x^1, \dots, x^n) \end{cases} \quad (5)$$

Если функция  $x = \varphi(t)$  — решение уравнения, то набор  $(\varphi, \dot{\varphi}, \dots, \varphi^{(n-1)})$  — решение системы; если  $(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$  — решение системы, то  $\varphi^1$  — решение уравнения.

**5<sup>0</sup>. Метод исключения.** При некоторых дополнительных условиях систему удается свести к одному уравнению. Рассмотрим для простоты систему третьего порядка.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y, z), \\ \dot{y} = g(t, x, y, z), \\ \dot{z} = h(t, x, y, z). \end{cases}$$

Дифференцирование первого уравнение дает

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} f + \frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial f}{\partial z} h, \text{ т.е.} \\ &\ddot{x} = G(t, x, y, z) \end{aligned}$$

Повторное дифференцирование приводит к уравнению

$$\ddot{x} = H(t, x, y, z) \quad (6)$$

При некоторых дополнительных условиях система

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y, z), \\ \ddot{x} = G(t, x, y, z) \end{cases} \quad (7)$$

равносильна системе

$$\begin{cases} y = p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}), \\ z = q(t, x, \dot{x}, \ddot{x}). \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя выражения (8) в уравнение (6), получаем дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = \Phi(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad (9)$$

третьего порядка.

Имея решение уравнения (9), решение системы строим с помощью соотношений (8).

## § 2. Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = a_1^1(t)x^1 + \dots + a_n^1(t)x^n + f^1(t), \\ \dots \\ \dot{x}^n = a_1^n(t)x^1 + \dots + a_n^n(t)x^n + f^n(t), \end{cases} \quad (1)$$

$a_1^1, \dots, a_n^n; f^1, \dots, f^n$  непрерывны на интервале  $(\alpha, \beta)$ .

Система

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = a_1^1(t)x^1 + \dots + a_n^1(t)x^n, \\ \dots \\ \dot{x}^n = a_1^n(t)x^1 + \dots + a_n^n(t)x^n, \end{cases} \quad (2)$$

называется линейной однородной (соответствующей системе(1)).

Если ввести в рассмотрение матрицу

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1^1(t) & \dots & a_n^1(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n(t) & \dots & a_n^n(t) \end{pmatrix},$$

то наши системы можно записать в матричном виде

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad (1')$$

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2')$$

### Теорема существования и единственности.

Если  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , то задача Коши для системы (1) с начальным условием

$$x|_{t_0} = x_0 \quad (3)$$

имеет единственное решение  $x = \varphi(t)$ ,  $t \in (\alpha, \beta)$ , определенное на всем интервале  $(\alpha, \beta)$ .

## § 3. Линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

В этом параграфе мы рассмотрим систему

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1)$$

**Предложение 1.** Решения системы (1) образуют линейное пространство, подпространство линейного пространства непрерывно дифференцируемых вектор-функций, определенных на  $(\alpha, \beta)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi, \psi$  — решения системы (1), т.е.  $\dot{\varphi} = A\varphi$ ,  $\dot{\psi} = A\psi$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\chi = \lambda\varphi + \mu\psi$ . Тогда

$$\dot{\chi} = \lambda\dot{\varphi} + \mu\dot{\psi} = \lambda A\varphi + \mu A\psi = A(\lambda\varphi + \mu\psi) = A\chi,$$

$\chi$  — решение системы (1).

**Определение** Вектор-функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  на  $(\alpha, \beta)$  называются линейно зависимыми, если существует такой ненулевой набор чисел  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ , что

$$\lambda^1\varphi_1 + \dots + \lambda^n\varphi_n = 0.$$

**Определение.** Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — вектор-функции на  $(\alpha, \beta)$ . Функция

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_n^1(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^n(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского. Определитель составлен из координатных столбцов вектор-функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ .

**Предложение 2.** Если  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно зависимы, то  $W = 0$ .

**Доказательство.** Линейная зависимость функций означает линейную зависимость столбцов матрицы. Поэтому определитель равен нулю.

**Предложение 3.** Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — решения системы (1),  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ ,  $W(t_0) = 0$ .

Тогда  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно зависимы.

**Доказательство.** Пусть  $W(t_0) = 0$ , тогда столбцы определителя  $W(t_0)$  линейно зависимы, найдется такой ненулевой набор чисел  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ , что  $\lambda^1\varphi_1(t_0) + \dots + \lambda^n\varphi_n(t_0) = 0$ . Функция  $\varphi = \lambda^1\varphi_1 + \dots + \lambda^n\varphi_n$  является решением задачи Коши с нулевым начальным условием в точке  $t_0$ . По теореме единственности  $\varphi = 0$ , функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно зависимы.

**Альтернатива Вронского.** Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — решения системы (1).

Тогда

$$\forall t \in (\alpha, \beta) W(t) = 0 \text{ или } \forall t \in (\alpha, \beta) W(t) \neq 0.$$

**Формула Лиувилля.** Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — решения системы (1),  $W$  — определитель Вронского.

Тогда

$$W(t) = W(t_0) e^{P(t)}, \quad (2)$$

где  $P(t)$  — первообразная для следа  $\text{tr}(A(t)) = \sum_{k=1}^n a_k^k(t)$  матрицы  $A$ ,  $P(t) = \int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds$ .

**Доказательство.**

Производная  $\dot{W}(t)$  записывается в виде суммы  $n$  определителей, в каждом из которых дифференцированию подвергнута одна строка. Рассмотрим, например первый из определителей

$$\begin{vmatrix} \dot{\varphi}_1^1(t) & \dots & \dot{\varphi}_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) & \dots & \varphi_n^2(t) \\ \dots & & \dots \\ \varphi_1^n(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix}$$

В этом определителе первая строка в силу системы (1) является линейной комбинацией строк определителя Вронского (с коэффициентами  $a_1^1(t), \dots, a_n^1(t)$ ). Пользуясь линейностью определителя по строке, мы можем записать этот определитель в виде суммы  $n$  слагаемых:

$$a_1^1(t) \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) & \dots & \varphi_n^2(t) \\ \dots & & \dots \\ \varphi_1^n(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} + a_2^1(t) \begin{vmatrix} \varphi_1^2(t) & \dots & \varphi_n^2(t) \\ \varphi_1^3(t) & \dots & \varphi_n^3(t) \\ \dots & & \dots \\ \varphi_1^n(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{vmatrix} + \dots + a_n^1(t) \begin{vmatrix} \varphi_1^n(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \\ \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_n^1(t) \\ \dots & & \dots \\ \varphi_1^{n-1}(t) & \dots & \varphi_n^{n-1}(t) \end{vmatrix}.$$

Первое слагаемое равно  $a_1^1(t)W(t)$ , а остальные оказываются нулями, поскольку определители содержат две одинаковые строки.

Повторив рассуждение для остальных слагаемых, мы получим формулу

$$\dot{W}(t) = (a_1^1(t) + \dots + a_n^1(t))W(t), \quad \dot{W}(t) = \text{tr}(A(t))W(t).$$

Проведенные вычисления можно представить одной строкой:

$$\dot{W}(t) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{i-1}(t) & \dots & \varphi_n^{i-1}(t) \\ \dot{\varphi}_1^i(t) & \dots & \dot{\varphi}_n^i(t) \\ \varphi_1^{i+1}(t) & \dots & \varphi_n^{i+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_j^i \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{i-1}(t) & \dots & \varphi_n^{i-1}(t) \\ \varphi_1^j(t) & \dots & \varphi_n^j(t) \\ \varphi_1^{i+1}(t) & \dots & \varphi_n^{i+1}(t) \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i^i W(t) = \text{tr}(A(t))W(t)$$

Определитель Вронского — решение линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка  $\dot{z} = \text{tr}(A(t))z$ . Справедлива формула (2).

**Предложение 4.** Пространство решений системы (1)  $n$ -мерно.

**Доказательство.** Выберем  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ . По теореме существования и единственности системы (1) имеет решения  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , удовлетворяющие начальным условиям  $\varphi_1(t_0) = e_1, \dots, \varphi_n(t_0) = e_n$  (здесь  $e_1, \dots, e_n$  — канонический базис пространства  $\mathbb{R}^n$ ). Эти решения образуют линейно независимую систему. Размерность пространства решений не меньше  $n$ . Пусть  $\varphi$  — произвольное решение, тогда  $\varphi - \varphi^1(t_0)\varphi_1 - \dots - \varphi^n(t_0)\varphi_n$  — решение задачи Коши с нулевым начальным условием. По теореме единственности  $\varphi = \varphi^1(t_0)\varphi_1 + \dots + \varphi^n(t_0)\varphi_n$ ,  $\varphi$  — линейная комбинация  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Размерность пространства решений не больше  $n$ .  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — базис пространства решений.

**Определение.** Базис пространства решений называется фундаментальной системой решений (ФСР).

ФСР, построенная в Предложении 2, называется ФСР, нормированной в точке  $t_0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — ФСР системы (1).

Тогда формула

$$x = C^1 \varphi_1(t) + \dots + C^n \varphi_n(t). \quad (3)$$

дает общее решение системы (1).

При любых  $C^1, \dots, C^n$  функция  $C^1 \varphi_1 + \dots + C^n \varphi_n$  — решение, и все решения так представляются.

**Определение.** Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — ФСР системы (1). Рассмотрим матрицу  $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ , составленную из столбцов  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Эта матрица называется фундаментальной матрицей системы (1).

Теперь общее решение можно записать в виде

$$x(t) = \Phi(t)C, \quad (4)$$

где  $C$  — произвольный столбец.

Заметим, что для фундаментальной матрицы справедливо соотношение

$$\dot{\Phi} = A\Phi.$$

$\Phi$  — невырожденная матрица, удовлетворяющая уравнению (1).

## § 4. Линейная неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений

### 1<sup>0</sup>. Теорема 1. Общее решение

Мы рассматриваем линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \quad (1)$$

и соответствующую ей линейную однородную систему

$$\dot{x} = A(t)x \quad (2)$$

Если  $\psi_0$  — решение (1), а  $\varphi$  — решение (2), то  $\psi = \psi_0 + \varphi$  — решение (1); если  $\psi_0, \psi$  — решения (1), то  $\varphi = \psi - \psi_0$  — решение (1). Мы можем сказать, что формула  $\psi = \psi_0 + \varphi$  дает общий вид решения линейной неоднородной системы.

Если  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — фундаментальная система решений системы (2), а  $\psi_0$  — решение (1), то формула

$$x = \psi_0(t) + C^1 \varphi_1(t) + \dots + C^n \varphi_n(t) \quad (3)$$

дает общее решение линейной неоднородной системы (1).

**Доказательство.**

1) Если  $\psi_0$  — решение (1), а  $\varphi$  — решение (2), то

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 + \dot{\varphi} = A\psi_0 + f + A\varphi = A(\psi_0 + \varphi) + f = A\psi + f,$$

$\psi$  — решение (1).

2) Если  $\psi_0, \psi$  — решения (1), а  $\varphi = \psi - \psi_0$ , то

$$\dot{\varphi} = \dot{\psi} - \dot{\psi}_0 = (A\psi + f) - (A\psi_0 + f) = A(\psi - \psi_0) = A\varphi,$$

$\varphi$  — решение линейной однородной системы.

Из доказанных утверждений видно, что любая функция, полученная по формуле (3) — решение линейной неоднородной системы; наоборот, любое решение  $\psi$  записывается в виде  $\psi = \psi_0 + \varphi$ , а  $\varphi$ , в свою очередь, записывается в виде  $\varphi = C^1 \varphi_1 + \dots + C^n \varphi_n$ , так что  $\psi$  получается по формуле (3).

**2<sup>0</sup>. Метод вариации произвольных постоянных.**

Если  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — фундаментальная система решений системы (2), то решение линейной неоднородной системы (1) можно найти по формуле

$$\psi = C^1(t)\varphi_1(t) + \dots + C^n(t)\varphi_n(t), \text{ где} \quad (4)$$

функции  $C^1, \dots, C^n$  находятся из системы линейных уравнений

$$\dot{C}^1 \varphi_1 + \dots + \dot{C}^n \varphi_n = f. \quad (5)$$

Действительно,

$$\dot{\psi} = C^1 \dot{\varphi}_1 + \dots + C^n \dot{\varphi}_n + \dot{C}^1 \varphi_1 + \dots + \dot{C}^n \varphi_n = C^1 A\varphi_1 + \dots + C^n A\varphi_n + f = A\psi + f,$$

$\psi$  — решение системы (1).

## § 5. Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

**1<sup>0</sup>. Линейная однородная система. Случай характеристического многочлена с простыми корнями.**

$$\dot{x} = Ax, \quad A \text{ — комплексная матрица.} \quad (1)$$

**Предложение 1.**

$x = U e^{\lambda_0 t}$ ,  $U \neq 0$  — решение системы (1)  $\Leftrightarrow \lambda_0$  — собственное число,  $U$  — собственный вектор матрицы  $A$ .

**Доказательство.**

$x = Ue^{\lambda_0 t}$ ,  $U \neq 0$  — решение системы (1)  $\Leftrightarrow \lambda_0 U e^{\lambda_0 t} = A U e^{\lambda_0 t} \Leftrightarrow AU = \lambda_0 U \Leftrightarrow \lambda_0$  — собственное число,  $U$  — собственный вектор матрицы  $A$ .

**Теорема 1.**

Пусть  $A$  имеет  $n$  различных собственных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $U_1, \dots, U_n$  — соответствующие собственные векторы.

Тогда функции

$$U_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, U_n e^{\lambda_n t} \quad (2)$$

образуют ФСР системы (1).

**Доказательство.**

По предложению 1 функции совокупности (2) являются решениями системы (1). Проверим линейную независимость. Проведем индукцию по  $n$ . При  $n=1$  линейная независимость обеспечена отличием собственного вектора от нуля. Допустим, линейная независимость установлена для совокупности, включающей  $n$  функций. Рассмотрим совокупность из  $n+1$  функции. Допустим, линейная комбинация этих функций с коэффициентами  $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n, \alpha^{n+1}$  оказалась нулевой функцией:

$$\alpha^1 U_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha^2 U_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha^n U_n e^{\lambda_n t} + \alpha^{n+1} U_{n+1} e^{\lambda_{n+1} t} = 0. \quad (3)$$

Тогда

$$\alpha^1 U_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})t} + \alpha^2 U_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_{n+1})t} + \dots + \alpha^n U_n e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})t} + \alpha^{n+1} U_{n+1} = 0.$$

Дифференцирование дает равенство

$$\alpha^1 U_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) e^{(\lambda_1 - \lambda_{n+1})t} + \alpha^2 U_2 (\lambda_2 - \lambda_{n+1}) e^{(\lambda_2 - \lambda_{n+1})t} + \dots + \alpha^n U_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})t} = 0.$$

По индукционному предположению  $\alpha^1 = \dots = \alpha^n = 0$ ; соотношение (3) сводится к  $\alpha^{n+1} U_{n+1} e^{\lambda_{n+1} t} = 0$ , так что и  $\alpha^{n+1} = 0$ . Линейная комбинация функций (2) оказывается нулевой только при нулевых коэффициентах, функции (2) линейно независимы.

**Замечание.** ФСР из функций вида  $Ue^{\lambda t}$  можно построить и в том случае, если матрица имеет кратные корни, но каждому собственному числу отвечает столько линейно независимых собственных векторов, какова кратность собственного числа.

В такой ситуации в пространстве  $\mathbb{R}^n$  существует базис из собственных векторов матрицы  $A$ , матрица  $A$  подобна диагональной матрице, т.е. существует такая невырожденная матрица  $K$ , что  $B = K^{-1}AK$  — диагональная матрица. Выполним в (1) замену переменной по формуле

$$x = Ky: \quad (4)$$

$$K\dot{y} = AKy, \quad \dot{y} = K^{-1}AKy,$$

$$\dot{y} = By. \quad (5)$$

В координатах система (5) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \lambda_1 y^1, \\ \dots \\ \dot{y}^n = \lambda_n y^n. \end{cases} \quad (6)$$

Система распадается на отдельные уравнения и легко интегрируется:

$$\begin{cases} y^1 = C^1 e^{\lambda_1 t}, \\ \dots \\ y^n = C^n e^{\lambda_n t}. \end{cases} \quad (7)$$

Формулы (7) дают общее решение системы (6), а преобразование (4) приводит к общему решению (1).

При решении конкретных задач можно не проводить явное приведение системы к диагональному виду, а построить ФСР в форме (2), взяв максимальную линейно независимую систему собственных векторов для каждого собственного числа матрицы  $A$ .

**2<sup>0</sup>. Линейная однородная система. Случай характеристического многочлена с кратными корнями.**

Приведем матрицу к форме Жордана:

$$B = K^{-1}AK \text{ — жорданова матрица.} \quad (8)$$

Замена (4) дает систему (5), которая распадается на несколько систем, имеющих своими матрицами жордановы клетки. Рассмотрим одну из таких систем.

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \lambda y^1, \\ \dot{y}^2 = y^1 + \lambda y^2, \\ \dots \\ \dot{y}^k = y^{k-1} + \lambda y^k. \end{cases} \quad (9)$$

Интегрирование дает общее решение

$$\begin{cases} y^1 = C^1 e^{\lambda t}, \\ y^2 = C^1 t e^{\lambda t} + C^2 e^{\lambda t}, \\ \dots \\ y^k = C^1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda t} + \dots + C^k e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (10)$$

ФСР системы (9) состоит из функций

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \frac{t^3}{2!} \\ \dots \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \\ \dots \\ \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \end{pmatrix} e^{\lambda t}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}. \quad (11)$$

Объединяя ФСР систем вида (9), мы получаем ФСР

$$\psi^1, \dots, \psi^n$$

системы (5).

Функции

$$\varphi^1 = K\psi^1, \dots, \varphi^n = K\psi^n \quad (12)$$

образуют ФСР системы (1).

Явно приводить матрицу к форме Жордана не обязательно. Можно заметить, что ФСР (12) состоит из функций вида

$$U(t) e^{\lambda t},$$

где  $\lambda$  — собственное число матрицы  $A$ ,  $U$  — столбец из многочленов, степени которых не превосходят  $k-1$  ( $k$  — кратность собственного числа). Указанную оценку можно уточнить, степени многочленов не превзойдут порядка соответствующей жордановой клетки.

Для получения ФСР следует построить достаточно число линейно независимых решений указанного вида. Можно начать с построения решений вида  $U e^{\lambda t}$ ,  $U$  — собственный вектор,

затем построить решения  $(Ut + V)e^{\lambda t}$ ,  $(Ut^2 + Vt + W)e^{\lambda t}$  и т. д. до получения требуемого числа решений.

### 3<sup>0</sup>. Построение вещественной ФСР.

Сосредоточимся на рассмотрении вещественных систем. Вещественная матрица может иметь невещественные собственные числа. Поэтому предложенная процедура приводит нас к ФСР, в которой могут присутствовать невещественные функции. Если система

$$\dot{x} = Ax$$

с вещественными коэффициентами имеет комплексное решение  $\varphi$ , то решениями являются и  $\operatorname{Re} \varphi$ ,  $\operatorname{Im} \varphi$ . Можно считать, что ФСР включает в себя вместе с  $\varphi$  и функцию  $\bar{\varphi}$ , так что пара функций  $\operatorname{Re} \varphi$ ,  $\operatorname{Im} \varphi$  заменяет пару  $\varphi$ ,  $\bar{\varphi}$ . Операция овеществления сохраняет число функций, причем старая и новая системы являются линейными комбинациями друг для друга:

$$\operatorname{Re} \varphi = \frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi}), \operatorname{Im} \varphi = \frac{1}{2i}(\varphi - \bar{\varphi});$$

$$\varphi = \operatorname{Re} \varphi + i \operatorname{Im} \varphi, \bar{\varphi} = \operatorname{Re} \varphi - i \operatorname{Im} \varphi.$$

Получаемая вещественная совокупность тоже окажется ФСР.

Заметим, что достаточно построить решения, отвечающие одному из собственных чисел  $\lambda$ ,  $\bar{\lambda}$  и выделить вещественные и мнимые части этих решений.

### 4<sup>0</sup>. Линейная неоднородная система.

Вопрос интегрирования линейной неоднородной системы

$$\dot{x} = Ax + f(t) \quad (13)$$

принципиально решается методом вариации произвольных постоянных, но для систем со свободными членами специального вида удобнее пользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Если

$$f(t) = M_l(t)e^{\lambda_0 t},$$

где  $M_l(t)$  — столбец из многочленов степени не выше  $l$ , можно попытаться найти решение в виде

$$x = S_l(t)e^{\lambda_0 t}, \quad (14)$$

где  $S_l(t)$  — столбец из многочленов степени не выше  $l$ . Возможность такого построения гарантируется, если  $\lambda_0$  не является собственным числом матрицы  $A$ . Если же  $\lambda_0$  — собственное число кратности  $k$ , то может потребоваться повышение степени многочленов, но не более чем на  $k$  единиц, можно найти решение в виде

$$x = S_{l+k}(t)e^{\lambda_0 t}. \quad (15)$$

Убедимся в возможности найти решение в форме (14) или (15).

Замена переменных  $x = Ky$  сводит систему (13) к системе с жордановой матрицей

$$\dot{y} = By + g(t). \quad (16)$$

Последняя система распадается на системы с жордановыми клетками. Рассмотрим одну из таких систем

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \lambda y^1 + N_l^1(t) e^{\lambda_0 t}, \\ \dot{y}^2 = y^1 + \lambda y^2 + N_l^2(t) e^{\lambda_0 t}, \\ \dots \\ \dot{y}^k = y^{k-1} + \lambda y^k + N_l^k(t) e^{\lambda_0 t}. \end{cases}$$

Предположим, что  $\lambda_0 \neq \lambda$ . Первое уравнение имеет решение вида  $y^1 = T_l^1(t) e^{\lambda_0 t}$ . Подставив, это выражение во второе уравнение, получаем уравнение

$$\dot{y}^2 = \lambda y^2 + \tilde{N}_l^2(t) e^{\lambda_0 t}$$

с решением вида  $y_2 = T_l^2(t) e^{\lambda_0 t}$ , и т.д. Получается решение вида  $y = T_l(t) e^{\lambda_0 t}$ .

Если  $\lambda_0 = \lambda$ , то первое уравнение имеет решение вида  $y_1 = t T_l(t) e^{\lambda_0 t}$ . Подставив, это выражение во второе уравнение, получаем уравнение

$$\dot{y}^2 = \lambda y^2 + \tilde{N}_{l+1}^2(t) e^{\lambda_0 t}$$

с решением вида  $y^2 = t T_{l+1}^2(t) e^{\lambda_0 t}$ , и т.д. Получается решение вида  $y = T_{l+k}(t) e^{\lambda_0 t}$ .

Возвращаясь к старым переменным ( $x = Ky$ ), получаем решение вида (14) или (15) системы (13).

Для вещественной системы

$$\dot{x} = Ax + e^{\alpha t} (M_l(t) \cos \beta t + N_m(t) \sin \beta t) \quad (17)$$

решение можно найти в виде

$$x = e^{\alpha t} (S_\nu(t) \cos \beta t + T_\nu(t) \sin \beta t), \quad (\nu = \max\{l, m\}), \quad (18)$$

если  $\alpha \pm i\beta$  не являются с.ч. матрицы  $A$ , и в виде

$$x = e^{\alpha t} (S_{\nu+k}(t) \cos \beta t + T_{\nu+k}(t) \sin \beta t), \quad (19)$$

если  $\alpha \pm i\beta$  — с.ч. кратности  $k$  для матрицы  $A$ .

(Рассмотрим систему  $\dot{x} = Ax + e^{(\alpha+i\beta)x} (M_l(t) - iN_m(t))$ . По доказанному система имеет решение вида  $x = U_{l+k}(t) e^{(\alpha+\beta i)t}$ . Вещественная часть этого решения имеет вид (19) и служит решением для (17).

## 5<sup>0</sup>. Примеры.

**Пример 1.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Эта матрица имеет собственные числа  $\lambda_{1,2,3} = 1$ .

Рассмотрим линейную однородную систему

$$\dot{x} = Ax \quad (20)$$

Алгебраическая система  $AU = U$ , или  $BU = 0$ , где  $B = A - E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ , имеет с

точностью до числового множителя единственное решение  $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  — собственный вектор матрицы  $A$ ,  $Ue^t$  — решение системы (20).

Дополнительное решение ищем в виде

$$x = (Ut + V)e^t.$$

Подстановка в систему дает

$$Ut + V + U = A(Ut + V),$$

$$BU = 0; BV = U.$$

Можем взять  $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Функция  $(Ut + V)e^t = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}e^t$  — решение системы.

Третье решение найдем в виде

$$x = (Ut^2 + 2Vt + W)e^t:$$

$$(Ut^2 + 2Vt + W + 2Ut + 2V)e^t = A((Ut^2 + 2Vt + W)e^t);$$

$$BU = 0; BV = U; BW = 2V$$

Полагаем  $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Функция  $\begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^2 + 1 \\ 2t + 2 \end{pmatrix}e^t$  — решение системы.

Решения  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t$ ,  $\begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}e^t$ ,  $\begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^2 + 1 \\ 2t + 2 \end{pmatrix}e^t$  образуют ФСР, формула

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^t + c_2 \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}e^t + c_3 \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^2 + 1 \\ 2t + 2 \end{pmatrix}e^t$$

дает общее решение линейной однородной системы (20).

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^t \quad (21)$$

Следует попытаться найти решение в виде  $x = Se^t$ . Для отыскания столбца  $S$  получаем

систему  $BS = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}S = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , не имеющую решений.

Ищем решение в виде  $x = (Pt^3 + Qt^2 + Rt + S)e^t$ .

Для столбцов  $P, Q, R, S$  должны выполняться условия

$$BP = 0, BQ = 3P, BR = 2Q, BS = R + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмем  $P = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $Q = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $R = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ , для отыскания столбца  $S$  получаем систему

$$BS = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3\alpha \\ 6\alpha \end{pmatrix}. \text{ Система оказывается совместной только при } \alpha = 1, \text{ решением} \\ \text{является, например, столбец } S = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Построено решение  $\begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^3 + 3t + 3 \\ 3t^2 + 6t + 9 \end{pmatrix} e^t$  для системы (21).

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 2 \cos t + 14 \sin t \\ 3 \cos t + 2 \sin t \\ -4 \cos t - 8 \sin t \end{pmatrix} \quad (22)$$

Решение ищем в виде  $x = P \cos t + Q \sin t$ . Подстановкой в (22) получаем

$$-P \sin t + Q \cos t = AP \cos t + AQ \sin t + \begin{pmatrix} 2 \cos t + 14 \sin t \\ 3 \cos t + 2 \sin t \\ -4 \cos t - 8 \sin t \end{pmatrix}$$

$$Q = AP + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, -P = AQ + \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$-P = A \left( AP + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}, -P = A^2 P + A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ , то для отыскания столбца  $P$  получаем

систему

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} P + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} = 0,$$

решением которой является столбец  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Формула  $Q = AP + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$  дает  $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Система (22) имеет решение  $x = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2 \cos t + 3 \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ .

**Пример 2.**  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_{1,2,3} = 2$ ,

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} e^{2t} \text{ — ФСР системы } \dot{x} = Ax.$$

Система  $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} -3 \cos t - 2 \sin t \\ -3 \sin t \\ -2 \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}$  имеет решение  $x = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

**Пример 3.**  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 7 & 6 & -5 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_{1,2,3} = 3$ ,  $B = A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

$$BU = 0 \text{ для } U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad BV = U \text{ для } V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{для } BW = V, W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = U e^{3t}, \quad x_2 = (U t + V) e^{3t}, \quad x_3 = (U t^2 + 2Vt + 2W) e^{3t} \text{ — ФСР системы } \dot{x} = Ax.$$

Система  $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$  имеет решение  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$ . Система  $\dot{x} = Ax - \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} e^{3t}$  имеет решение

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}. \quad \text{Система } \dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} e^{3t} \text{ имеет решение } x = \begin{pmatrix} 2U t^3 + 6V t^2 + 12W t + 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

**Пример 5.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_{2,3} = 2 \pm 2i$ .

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^{2t}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} e^{2t} \quad \text{— ФСР системы } \dot{x} = Ax.$$

**Пример 6.**

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 36 & -5 \\ -10 & 22 & -3 \\ -10 & 20 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm i$$

$$\begin{cases} x = 2e^{2t} \\ y = e^{2t} \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^t (9 \cos t + 2 \sin t) \\ y = 5e^t \cos t \\ z = e^t (5 \cos t - 5 \sin t) \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^t (9 \sin t - 2 \cos t) \\ y = 5e^t \sin t \\ z = e^t (5 \sin t + 5 \cos t) \end{cases} \quad \text{— ФСР системы } \dot{x} = Ax.$$

**Пример 7.**

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2,3} = 1$$

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 4t-1 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} e^t \quad \text{— общее решение системы } \dot{x} = Ax.$$

Система  $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$  имеет решение  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Система  $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$  имеет решение

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$ . Система  $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$  имеет решение  $x = \begin{pmatrix} -2t+1 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} e^t$ . Система  $\dot{x} = Ax + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$

имеет решение  $x = \begin{pmatrix} 4t^2-2t \\ 2t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} e^t$ .