

§ 7. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (1)$$

$$Ly = 0,$$

$a_1, \dots, a_n$ — числа.

1°. Комплексные функции вещественного переменного.

Функция γ , определенная на промежутке Δ и принимающая комплексные значения:

$$\gamma: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$$

называется комплексной функцией вещественного переменного. Такую функцию можно записать в виде $\gamma = \varphi + i\psi$, где φ, ψ — вещественные функции, называемые вещественной и мнимой частью комплексной функции: $\varphi = \operatorname{Re} \gamma$, $\psi = \operatorname{Im} \gamma$.

Дифференцирование комплексной функции производится покомпонентно:

$$\gamma' = \varphi' + i\psi'.$$

Мы можем применить к комплексной функции оператор L :

$$L\gamma = L\varphi + iL\psi$$

Если $L\gamma = 0$, назовем функцию γ решением дифференциального уравнения (1).

Можно и само уравнение считать комплексным, т.е. допустить, что $a_1, \dots, a_n$ — комплексные числа.

Мы построим ФСР из функций вида $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, где λ — комплексное число.

2°. Характеристический многочлен.

Многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (2)$$

называется характеристическим многочленом дифференциального уравнения (1) и линейного дифференциального оператора L .

3°. Построение ФСР в случае простых корней характеристического многочлена

Предложение 1.

Пусть

$$\varphi_0: \varphi_0(x) = e^{\lambda_0 x} \quad \lambda_0 \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$L\varphi_0 = P(\lambda_0)\varphi_0, \quad (\forall x \quad (L\varphi_0)(x) = P(\lambda_0)\varphi_0(x)). \quad (3)$$

Доказательство.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_0 & & | \quad a_n \\ \varphi_0' = \lambda_0 \varphi_0 & & | \quad a_{n-1} \\ \varphi_0'' = \lambda_0^2 \varphi_0 & & | \quad a_{n-2} \\ \dots\dots\dots & & | \\ \varphi_0^{(n)} = \lambda_0^n \varphi_0 & & | \quad 1 \\ \hline L\varphi_0 = P(\lambda_0)\varphi_0 \end{array}$$

Предложение 2.

Пусть

$$\varphi: \varphi_0(x) = e^{\lambda_0 x} \quad \lambda_0 \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$\varphi_0 \text{ — решение} \Leftrightarrow P(\lambda_0) = 0.$$

Доказательство.

$$\varphi_0 \text{ — решение} \Leftrightarrow L\varphi_0 = 0 \Leftrightarrow P(\lambda_0)\varphi_0 = 0 \Leftrightarrow P(\lambda_0) = 0.$$

Предложение 3.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — попарно различные комплексные числа.

Тогда функции $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ линейно независимы (на любом промежутке).

Доказательство.

Рассмотрим определитель Вронского

$$W: W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x}.$$

Получился определитель Вандермонда $W(x) \neq 0$. Функции линейно независимы.

Теорема 1.

Пусть характеристический многочлен $P(\lambda)$ дифференциального уравнения (1) n -го порядка имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Тогда система функций

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x} \quad (*)$$

образует ФСР д.у. (1).

Доказательство.

По предложению 2 функции системы (*) — решения д.у. (1). По предложению 3 система (*) линейно независима. Система (*) состоит из n функций. (*) — базис пространства решений, ФСР.

4⁰. Построение ФСР в случае кратных корней характеристического многочлена.

λ_0 — корень кратности k для многочлена $P(\lambda) \Leftrightarrow P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda)$, $Q(\lambda)$ — многочлен, $Q(\lambda_0) \neq 0 \Leftrightarrow P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = \dots = P^{(k-1)}(\lambda_0) = 0$, $P^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$.

Предложение 4.

Пусть

$$\varphi_0(x) = \psi(x) e^{\lambda_0 x}.$$

Тогда

$$(L\varphi_0)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \psi^{(k)}(x) P^{(k)}(\lambda_0) e^{\lambda_0 x}.$$

Доказательство.

$$L\varphi_0(x) = \sum_{j=0}^n a_j (\varphi_0)^{(n-j)}(x) \text{ (здесь}$$

$a_0 = 1$).

$$\begin{aligned} L\varphi_0(x) &= \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=0}^{n-j} C_{n-j}^k \psi^{(k)}(x) (e^{\lambda_0 x})^{(n-j-k)} = \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=0}^{n-j} C_{n-j}^k \psi^{(k)}(x) \lambda_0^{n-j-k} e^{\lambda_0 x} = \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} a_j C_{n-j}^k \psi^{(k)}(x) \lambda_0^{n-j-k} e^{\lambda_0 x} = \sum_{k=0}^n \frac{\psi^{(k)}(x)}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} a_j (n-j)(n-j-1)\cdots(n-j-k+1) \lambda_0^{n-j-k} e^{\lambda_0 x} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\psi^{(k)}(x)}{k!} P^{(k)}(\lambda_0) e^{\lambda_0 x}, \\ \left(P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^{n-j}, P^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n-k} a_j (n-j)(n-j-1)\cdots(n-j-k+1) x^{n-j-k} \right). \end{aligned}$$

Предложение 5.

Пусть λ_0 — корень кратности k для характеристического многочлена $P(\lambda)$.

Тогда функции

$$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_0 x} \text{ —}$$

решения д.у. (1).

Действительно, пусть $\varphi_0(x) = x^j e^{\lambda_0 x}$, $j = 0, \dots, k-1$.

По предложению 4

$$L\varphi_0(x) = \sum_{l=0}^n \frac{(x^j)^{(l)}}{l!} P^{(l)}(\lambda_0) e^{\lambda_0 x}$$

Если $l = 0, 1, \dots, k-1$, то $P^{(l)}(\lambda_0) = 0$; если $l = k, k+1, \dots, n$, то $(x^j)^{(l)} = 0$. Таким образом, все слагаемые равны нулю, $L\varphi_0 = 0$. $L\varphi_0$ — решение д.у. (1).

В предложении 5 для корня λ_0 кратности k указано k решений.

Теорема 2.

Пусть характеристический многочлен $P(\lambda)$ д.у. (1) имеет различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ кратностей $k_1, k_2, \dots, k_r$ ($k_1 + \dots + k_r = n$).

Тогда система функций

$$\begin{aligned} &e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ &\dots\dots\dots \\ &e^{\lambda_r x}, xe^{\lambda_r x}, \dots, x^{k_r-1} e^{\lambda_r x} \end{aligned} \quad (**)$$

образует ФСР д.у. (1).

Доказательство.

Система (**) состоит из решений (по предложению 5).

Система (**) состоит из n функций.

Нужно доказать, что (**) линейно независима.

Доказательство проведем индукцией по r (по числу серий).

База индукции, $r = 1$.

Рассмотрим функции $e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}$.

Допустим, $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} + \dots + C_k x^{k_1-1} e^{\lambda_k x} = 0$ ($x \in (a, b)$), тогда $C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k_1-1} = 0$, многочлен степени не выше $(k_1 - 1)$ -й имеет бесконечно много корней. Следовательно, этот многочлен — нулевой.

Индукционный переход. Пусть для системы (**) с r сериями линейная независимость установлена. Рассмотрим систему с $(r+1)$ сериями.

Образуем линейную комбинацию функций этой системы:

$$M_1(x) e^{\lambda_1 x} + \dots + M_{r+1}(x) e^{\lambda_{r+1} x}, \quad M_j(x) \text{ — многочлен степени не выше } k_j - 1.$$

Допустим

$$M_1(x) e^{\lambda_1 x} + \dots + M_{r+1}(x) e^{\lambda_{r+1} x} = 0 \quad (x \in (a, b)).$$

Тогда

$$M_1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_{r+1})x} + \dots + M_r(x) e^{(\lambda_r - \lambda_{r+1})x} + M_{r+1}(x) = 0.$$

Заметим, что $\lambda_1 - \lambda_{r+1} \neq 0, \dots, \lambda_r - \lambda_{r+1} \neq 0$.

Дифференцируем достаточное число раз:

$$N_1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_{r+1})x} + \dots + N_r(x) e^{(\lambda_r - \lambda_{r+1})x} = 0,$$

$N_1, \dots, N_r$ — многочлены тех же степеней, что и $M_1, \dots, M_r$.

По индукционному предположению $N_1 = \dots = N_r = 0$. Следовательно, $M_1 = \dots = M_r = 0$.

Линейная комбинация сводится к одному слагаемому $M_{r+1}(x) e^{\lambda_{r+1} x}$.

$$M_{r+1}(x) e^{\lambda_{r+1} x} = 0 \quad (x \in (a, b)), \quad M_{r+1}(x) = 0. \quad M_{r+1}(x) \text{ — нулевой многочлен (см. } r = 1).$$

(**) линейно независима.

Упражнение. Провести доказательство теоремы 2 по другой схеме. Если характеристический многочлен имеет $\lambda_0 = 0$ корнем кратности

k , то функции $1, x, \dots, x^{k-1}$ — решения д.у.(1). Если некоторое комплексное число λ_0 — корень кратности k для

характеристического многочлена, положим в (1) $y = z e^{\lambda_0 x}$, получим ЛОДУ с постоянными коэффициентами $L_1 z = 0$, где

$$L_1 z = e^{-\lambda_0 x} L(z e^{\lambda_0 x}). \text{ Для характеристического многочлена } Q(\lambda) \text{ получается соотношение } Q(\lambda) = P(\lambda + \lambda_0). \quad 0 \text{ —}$$

корень k -й кратности для $Q(\lambda)$. $1, x, \dots, x^{k-1}$ — решения д.у. $L_1 z = 0$, $e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_0 x}$ — решения д.у. (1).

5⁰. Построение вещественной ФСР.

Пусть уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \tag{1}$$

$$Ly = 0,$$

имеет вещественные коэффициенты $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Предложение 6.

Пусть функция $\gamma = \varphi + i\psi$ (φ, ψ — вещественные функции) является решением д.у. (1) с вещественными коэффициентами.

Тогда φ, ψ — решения д.у.(1).

Доказательство.

$L\gamma = L\varphi + iL\psi$. $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, поэтому $L\varphi, L\psi$ вещественны.

$$\gamma \text{ — решение} \Rightarrow L\gamma = 0 \Rightarrow L\varphi + iL\psi = 0 \Rightarrow L\varphi = 0, L\psi = 0.$$

Итак, φ, ψ — решения д.у.(1).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ — различные вещественные корни характеристического многочлена, $k_1, k_2, \dots, k_r$ — их кратности, $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_s \pm i\beta_s$ — мнимые корни, $m_1, \dots, m_s$ — их кратности ($k_1 + \dots + k_r + 2(m_1 + \dots + m_s) = n$).

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda_{i_1} x}, x e^{\lambda_{i_1} x}, \dots, x^{k_{i_1}-1} e^{\lambda_{i_1} x} \\
& \dots\dots\dots \\
& e^{\lambda_{i_r} x}, x e^{\lambda_{i_r} x}, \dots, x^{k_{i_r}-1} e^{\lambda_{i_r} x} \\
& e^{\alpha_{i_1} x} \cos \beta_{i_1} x, x e^{\alpha_{i_1} x} \cos \beta_{i_1} x, \dots, x^{m_{i_1}-1} e^{\alpha_{i_1} x} \cos \beta_{i_1} x \\
& e^{\alpha_{i_1} x} \sin \beta_{i_1} x, x e^{\alpha_{i_1} x} \sin \beta_{i_1} x, \dots, x^{m_{i_1}-1} e^{\alpha_{i_1} x} \sin \beta_{i_1} x \\
& \dots\dots\dots \\
& e^{\alpha_{i_s} x} \cos \beta_{i_s} x, x e^{\alpha_{i_s} x} \cos \beta_{i_s} x, \dots, x^{m_{i_s}-1} e^{\alpha_{i_s} x} \cos \beta_{i_s} x \\
& e^{\alpha_{i_s} x} \sin \beta_{i_s} x, x e^{\alpha_{i_s} x} \sin \beta_{i_s} x, \dots, x^{m_{i_s}-1} e^{\alpha_{i_s} x} \sin \beta_{i_s} x
\end{aligned}
\tag{***}$$
$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{m-1}e^{\lambda x},$$

$$e^{\bar{\lambda} x}, xe^{\bar{\lambda} x}, \dots, x^{m-1}e^{\bar{\lambda} x}$$
$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$
$$\begin{aligned} x^j e^{\lambda x} &= x^j e^{\alpha x} \cos \beta x + i x^j e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ x^j e^{\bar{\lambda} x} &= x^j e^{\alpha x} \cos \beta x - i x^j e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$
$$1, x, x^2; e^{3x}, xe^{3x}; e^{4x}; \cos x, x \cos x, \sin x, x \sin x; e^{5x} \cos 6x, e^{5x} \sin 6x.$$

§ 8. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

$$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (1)$$

$$Ly = 0 \quad (2)$$

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$P(\lambda)$ характеристический многочлен дифференциального оператора L .

1⁰. Предложение 1. $f(x) = M_l(x)e^{\lambda_0 x}$, M_l — многочлен степени l , λ_0 — комплексное число.

Тогда 1) Если $P(\lambda_0) \neq 0$, то д.у. (1) имеет решение вида

$$y = \psi(x) = S_l(x)e^{\lambda_0 x}, \text{ где } S_l \text{ — многочлен степени } l.$$

2) Если λ_0 — корень кратности k для $P(\lambda)$, то решение можно найти в виде

$$y = \psi(x) = x^k S_l(x)e^{\lambda_0 x}$$

Доказательство

1) Дифференциальный оператор L переводит функции $x^j e^{\lambda_0 x}$ в

$$L(x^j e^{\lambda_0 x}) = P(\lambda_0)x^j e^{\lambda_0 x} + P'(\lambda_0)C_j^1 x^{j-1} e^{\lambda_0 x} + \dots + P^{(j)}(\lambda_0)C_j^j e^{\lambda_0 x}, \text{ если } j \leq n, \text{ и в}$$

$$L(x^j e^{\lambda_0 x}) = P(\lambda_0)x^j e^{\lambda_0 x} + P'(\lambda_0)C_j^1 x^{j-1} e^{\lambda_0 x} + \dots + P^{(n)}(\lambda_0)C_j^n x^{j-n} e^{\lambda_0 x}, \text{ если } j \geq n.$$

Образы функций $e^{\lambda_0 x}$, $x e^{\lambda_0 x}$, ..., $x^l e^{\lambda_0 x}$ выражаются через базисные элементы $e^{\lambda_0 x}$, $x e^{\lambda_0 x}$, ..., $x^l e^{\lambda_0 x}$ пространства функций вида $f(x) = M_l(x)e^{\lambda_0 x}$ посредством треугольной матрицы с ненулевыми диагональными элементами $P(\lambda_0) \neq 0$. Следовательно, эти образы тоже образуют базис и любая функция вида $f(x) = M_l(x)e^{\lambda_0 x}$ является их линейной комбинацией:

$$f(x) = A_0 L(e^{\lambda_0 x}) + A_1 L(x e^{\lambda_0 x}) + \dots + A_l L(x^l e^{\lambda_0 x}) = L(S_l(x)e^{\lambda_0 x}), \text{ где}$$

$$S_l(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_l x^l.$$

2) Если λ_0 — корень кратности k для $P(\lambda)$, мы рассмотрим образы функций

$x^k e^{\lambda_0 x}$, $x^{k+1} e^{\lambda_0 x}$, ..., $x^{k+l} e^{\lambda_0 x}$. Можем написать формулы

$$L(x^{k+j} e^{\lambda_0 x}) = P^{(k)}(\lambda_0)C_{k+j}^k x^j e^{\lambda_0 x} + P^{(k+1)}(\lambda_0)C_{k+j}^{k+1} x^{j-1} e^{\lambda_0 x} + \dots + P^{(k+j)}(\lambda_0)C_{k+j}^{k+j} e^{\lambda_0 x}, \text{ если } k+j \leq n, \text{ и}$$

$$L(x^{k+j} e^{\lambda_0 x}) = P^{(k)}(\lambda_0)C_{k+j}^k x^j e^{\lambda_0 x} + P^{(k+1)}(\lambda_0)C_{k+j}^{k+1} x^{j-1} e^{\lambda_0 x} + \dots + P^{(n)}(\lambda_0)C_{k+j}^n x^{k+j-n} e^{\lambda_0 x}, \text{ если}$$

$k+j \geq n$.

Система образов $x^k e^{\lambda_0 x}$, $x^{k+1} e^{\lambda_0 x}$, ..., $x^{k+l} e^{\lambda_0 x}$ опять формируется из базиса $e^{\lambda_0 x}$, $x e^{\lambda_0 x}$, ..., $x^l e^{\lambda_0 x}$ с помощью треугольной матрицы с ненулевыми диагональными элементами.

2⁰. Предложение 2. Мы рассматриваем д.у. (1) с вещественными коэффициентами.

Комплексная функция $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ — решение д.у. $Ly = f = f_1 + if_2$ в том и только в том случае, если ψ_1 — решение $Ly = f_1$, ψ_2 — решение $Ly = f_2$.

Доказательство

Поскольку уравнение имеет вещественные коэффициенты, то для вещественных функций $\psi_{1,2}$ функции $L\psi_{1,2}$ вещественны. Таким образом,

ψ — решение д.у. $Ly = 0 \Leftrightarrow L\psi = f \Leftrightarrow L\psi_1 + iL\psi_2 = f_1 + if_2 \Leftrightarrow \begin{cases} L\psi_1 = f_1 \\ L\psi_2 = f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \psi_1$ — решение

$Ly = f_1$, ψ_2 — решение $Ly = f_2$.

3⁰. Предложение 3. $f(x) = e^{\alpha x} (M_l(x) \cos \beta x + N_m(x) \sin \beta x)$, M_l — многочлен степени l , N_m — многочлен степени m , $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Тогда 1) если $P(\alpha \pm i\beta) \neq 0$, то д.у. (1) имеет решение вида

$$y = \psi(x) = e^{\alpha x} (S_\nu(x) \cos \beta x + T_\nu(x) \sin \beta x),$$

S_ν, T_ν — многочлены степени $\nu = \max\{l, m\}$,

2) если каждое из чисел $\alpha \pm i\beta$ является корнем кратности k , то решение следует искать в виде

$$y = \psi(x) = x^k e^{\alpha x} (S_\nu(x) \cos \beta x + T_\nu(x) \sin \beta x).$$

Доказательство

Рассмотрим уравнение

$$Ly = (M_l(x) - iN_m(x))e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

По Предложению 1 оно имеет решение вида

$$\psi(x) = x^k U_\nu(x) e^{(\alpha+i\beta)x} = x^k (S_\nu(x) - iT_\nu(x)) e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

По Предложению 2 функция

$$\psi_1(x) = \operatorname{Re} \psi(x) = x^k e^{\alpha x} (S_\nu(x) \cos \beta x + T_\nu(x) \sin \beta x)$$

является решением уравнения с правой частью

$$f(x) = e^{\alpha x} (M_l(x) \cos \beta x + N_m(x) \sin \beta x).$$

Примеры

1) $y'' - 2y' + y = e^{2x} + e^x$, $y = e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^x$

2) $y'' + a^2 y = \cos \omega x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Решение ищем в виде $y = A \cos ax + B \sin ax$. подстановка в уравнение дает

$$(a^2 - \omega^2) A \cos \omega x + (a^2 - \omega^2) B \sin \omega x = \cos \omega x$$

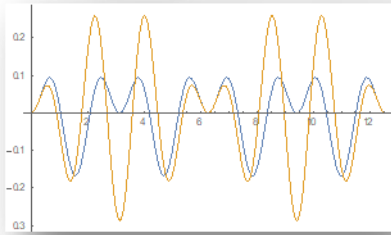
Если $a \neq \omega$, следует взять $A = \frac{1}{a^2 - \omega^2}$, $B = 0$. Общее решение дается формулой

$$y = \frac{1}{a^2 - \omega^2} \cos \omega x + C_1 \cos ax + C_2 \sin ax, \text{ а решение задачи Коши — формулой}$$

$$y = \frac{1}{a^2 - \omega^2} (\cos \omega x - \cos ax). \text{ На рисунке приведены графики для } a = 4, \omega = 2 \text{ (синий)}$$

и $a = 4, \omega = 3$ (желтый).

$$\frac{1}{4^2 - 2^2}(\cos 2x - \cos 4x), \frac{1}{4^2 - 3^2}(\cos 3x - \cos 4x)$$



Если $a = \omega$, решение следует искать в виде $y = x(A \cos ax + B \sin ax)$. В таком случае

$y'' = -x(Aa^2 \cos ax + Ba^2 \sin ax) + 2(-Aa \sin ax + Ba \cos ax)$. Подстановка в уравнение дает

$2(-Aa \sin ax + Ba \cos ax) = \cos ax$, $A = 0$, $B = \frac{1}{2a}$. Функция $y = \frac{x}{2a} \sin ax$ является решением

задачи Коши. Заметим, что $\frac{1}{a^2 - \omega^2}(\cos \omega x - \cos ax) \xrightarrow{\omega \rightarrow a} \frac{x}{2a} \sin ax$, решение непрерывно зависит

от параметра. На рисунке приведен график функции $y = \frac{x}{2a} \sin ax$ при $a = 4$.

$$\frac{x}{8} \sin 4x$$

