Лекция 13 (продолжение) 18.03.2025

Глава II Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

§1. Частные производные

Определение. Пусть f — функция, определенная в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию одной переменной

$$\varphi : \varphi(t) = f\left(t, a^2, \ldots, a^n\right).$$

Производная этой функции $\varphi'\left(a^1\right)$ называется частной производной функции f по первой переменной в точке a и обозначается через $f_1'(a)$:

$$f_1'(a) = \varphi'\left(a^1\right) = \lim_{\Delta x^1 \to 0} \frac{f\left(a^1 + \Delta x^1, a^2, \ldots, a^n\right) - f\left(a^1, a^2, \ldots, a^n\right)}{\Delta x^1}.$$

Аналогично определяются частные производные по другим переменным.

Если обозначить через $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ i-й вектор канонического базиса, то частная производная по i-й переменной — это производная $\varphi'(0)$ функции $\varphi : \varphi(t) = f\left(a + te_i\right)$:

$$f_i'(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(a + te_i\right) - f(a)}{t}.$$

Для частных производных используются обозначения f_i', $\frac{\partial f}{\partial x^i}$, если функция обозначена через $y = f(x)$, то частную производную записывают в виде $\frac{\partial y}{\partial x^i}$.

Примеры. 1) $f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} x^2 + y^3$, $f_1'(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $f_2'(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$.

2) $f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy = 0, \\ 1, & xy \neq 0. \end{cases}$

Функция f терпит разрыв в точке $(0, 0)$. Однако $f_1'(0, 0) = f_2'(0, 0) = 0$.

Существование частных производных не влечет за собой непрерывность функции.

§ 2. Дифференцируемые функции

1^0. Определение. Пусть f — функция, определенная в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$. Функция f называется дифференцируемой в точке a, если существуют такие вещественные числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$, что приращение функции представляется в виде

$$f(a + h) - f(a) = A_1 h^1 + \cdots + A_n h^n + \alpha(h), \tag{1}$$

где $\alpha(h) \underset{h \to 0}{=} o(\|h\|)$, т.е. $\frac{\alpha(h)}{\|h\|} \underset{h \to 0}{\to} 0$.

Линейная функция $df(a, h) = A_1 h^1 + \cdots + A_n h^n$ называется дифференциалом функции f.

Для приращения дифференцируемой функции получается представление

$$f\left(a+h\right)-f\left(a\right)=df\left(a,\,h\right)+\alpha\left(h\right),\ \alpha\left(h\right)\underset{h\to 0}{=}o\left(\left\|h\right\|\right). \tag{2}$$

Лекция 14 21.03.2025

2⁰. Теорема 1 Для дифференцируемости функции f в точке a необходимо и достаточно, чтобы ее приращение имело представление

$f\left(a+h\right)-f\left(a\right)=A_1h^1+\cdots+A_nh^n+\beta_1\left(h\right)h^1+\cdots+\beta_n\left(h\right)h^n$, где $\beta_1,\ldots,\beta_n$ — непрерывные в нуле функции, $\beta_1\left(0\right)=0,\ldots,\beta_n\left(0\right)=0$.

Доказательство.

Достаточность. Заметим, что

$$\frac{\left|h^k\right|}{\sqrt{\left(h^1\right)^2+\cdots\left(h^n\right)^2}}\le 1,$$

Поэтому для $\alpha\left(h\right)=\beta_1\left(h\right)h^1+\cdots+\beta_n\left(h\right)h^n$ имеем

$$\frac{\alpha\left(h\right)}{\left\|h\right\|}=\frac{\beta_1\left(h\right)h^1+\cdots+\beta_n\left(h\right)h^n}{\sqrt{\left(h^1\right)^2+\cdots\left(h^n\right)^2}}\underset{h\to 0}{\to}0.$$

Необходимость. Пусть $\dfrac{\alpha\left(h\right)}{\left\|h\right\|}\underset{h\to 0}{\to}0$. Тогда

$$\alpha\left(h\right)=\alpha\left(h\right)\frac{\left\|h\right\|^2}{\left\|h\right\|^2}=\alpha\left(h\right)\frac{h^1}{\left\|h\right\|^2}h^1+\cdots+\alpha\left(h\right)\frac{h^n}{\left\|h\right\|^2}h^n=\beta_1\left(h\right)h^1+\cdots+\beta_n\left(h\right)h^n,$$

Положим

$$\beta_k\left(h\right)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\left(h\right)}{\left\|h\right\|^2}h^k,\ h\ne 0,\\ 0,\qquad\quad h=0.\end{cases}$$

Тогда

$$\alpha\left(h\right)=\beta_1\left(h\right)h^1+\cdots+\beta_n\left(h\right)h^n\ \text{ и }\ \beta_k\left(h\right)=\frac{\alpha\left(h\right)}{\left\|h\right\|}\frac{h^k}{\left\|h\right\|}\underset{h\to 0}{\to}0$$

(произведение бесконечно малой и ограниченной функций).

3⁰. Теорема 2. Дифференцируемая функция непрерывна.

4⁰. Теорема 3. Необходимое условие дифференцируемости.

Если функция дифференцируема, то она имеет частные производные по всем переменным.

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема, ее приращение имеет представление (1). Положим в (1) $h=te_i$, тогда

$$f\left(a+te_i\right)-f\left(a\right)=A_it+\alpha\left(te_i\right),$$

$$\frac{f\left(a+te_i\right)-f\left(a\right)}{t}=A_i+\frac{\alpha\left(te_i\right)}{t}\underset{t\to 0}{\to}A_i,$$

$$f_i'\left(a\right)=A_i.$$

Числа $A_1, A_2, \ldots, A_n$, фигурирующие в определении дифференцируемой функции, являются частными производными функции f, дифференциал можно записать в виде

$$df(a,\, h) = f_1'(a)h^1 + \cdots + f_n'(a)h^n. \qquad (3)$$

5⁰. Теорема 4. Достаточное условие дифференцируемости.

Пусть функция f определена в окрестности точки a имеет в этой окрестности частные производные по всем переменным, частные производные $f_1', \ldots, f_n'$ непрерывны в точке a. Тогда функция f дифференцируема в точке a.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $n = 2$.

Пусть функция имеет частные производные в некотором прямоугольнике с центром в точке $(x_0,\, y_0)$. Приращение функции запишем с помощью теоремы Лагранжа в виде

$$\begin{aligned} & f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0) = \\ & = \big(f(x,\, y) - f(x_0,\, y)\big) + \big(f(x_0,\, y) - f(x_0,\, y_0)\big) = \\ & f_1'(\xi,\, y)(x - x_0) + f_2'(x_0,\, \eta)(y - y_0), \end{aligned}$$

где ξ лежит между x_0 и x, а η — между y_0 и y.

Теперь

$$\begin{aligned} \alpha(x,\, y) &= f(x,\, y) - f(x_0,\, y_0) - f_1'(x_0,\, y_0)(x - x_0) - f_2'(x_0,\, y_0)(y - y_0) = \\ &= \big(f_1'(\xi,\, y) - f_1'(x_0,\, y_0)\big)(x - x_0) + \big(f_2'(x_0,\, \eta) - f_2'(x_0,\, y_0)\big)(y - y_0) \end{aligned}$$

и

$$\frac{\alpha(x,\, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} =$$

$$= \big(f_1'(\xi,\, y) - f_1'(x_0,\, y_0)\big)\frac{(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \big(f_2'(x_0,\, \eta) - f_2'(x_0,\, y_0)\big)\frac{(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \underset{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}}{\longrightarrow} 0$$

6⁰. Примеры.

1) Функция $f(x,\, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ не является дифференцируемой в точке $(0,\, 0)$.

Действительно, $f(x,\, 0) = x,\ f_1'(0,\, 0) = 1,\ f_2'(0,\, 0) = 1$, но

$\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^3} - (\Delta x + \Delta y) \neq o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$, поскольку для $\Delta x = \Delta y = \dfrac{1}{k}$ имеем

$$f\left(\frac{1}{k},\, \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{k}.$$

2) $f(x,\, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^4}$ дифференцируема в точке $(0,\, 0)$, $df(0,\, 0) = dx$. Действительно

$$0 \le \sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^4} - \Delta x \le 2^{2/3}\Delta y^{4/3} \le 2^{2/3}\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)^{2/3};$$

$$0 \le \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3 + \Delta y^4} - \Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \le 2^{2/3}\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)^{1/6} \underset{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}}{\longrightarrow} 0.$$

7⁰. Определение. Пусть F — отображение со значениями в пространстве $\mathbb{R}^m$, определенное в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$. Отображение F называется дифференцируемым в точке a, если существует такое линейное отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, что приращение отображения представляется в виде

$$F(a+h)-F(a)=A(h)+\alpha(h). \tag{4}$$

где $\alpha(h)=o(\|h\|)$, т.е. $\dfrac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|}\underset{h\to 0}{\to}0$.

Линейное отображение A называется дифференциалом отображения F и обозначается через $dF(a)$.

Как и для вещественной функции, представление (4) можно заменить на

$$F(a+h)-F(a)=A(h)+\beta_1(h)h^1+\cdots+\beta_n(h)h^n,\ \beta_1(0)=0,\ldots,\beta_n(0)=0,\ \beta_1,\ldots,\beta_n$$

непрерывны в нуле

Для дифференцируемости отображения F необходима и достаточна дифференцируемость его координатных функций.

Матрица дифференциала называется матрицей Якоби отображения F и обозначается через $F'(a)$. Матрица Якоби состоит из частных производных координатных функций отображения F. Если $F=\left(f^1,\ldots,f^m\right)$, то

$$F'(a)=\begin{pmatrix} f_1^{1\prime}(a) & \cdots & f_n^{1\prime}(a)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ f_1^{m\prime}(a) & \cdots & f_n^{m\prime}(a)\end{pmatrix}.$$

8^0. Линейное отображение.

Пусть $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ линейное отображение. Тогда само отображение A выполняет роль дифференциала. Матрица отображения A является матрицей Якоби.

Определение. Число $\|A\|=\sup\limits_{\|h\|\le 1}\|Ah\|$ называется нормой линейного отображения A.

Предложение

Для любого $h\in\mathbb{R}^n$ имеет место неравенство $\|Ah\|\le\|A\|\|h\|$.

Действительно, при $h=0$ неравенство очевидно, если $h\ne 0$, то вектор $\tilde{h}=h/\|h\|$ имеет единичную норму, так что по определению нормы линейного отображения получаем неравенство $\|A\tilde{h}\|\le\|A\|$, из которого требуемое неравенство получается умножением на $\|h\|$.

§ 3. Дифференцирование композиции

1^0. Теорема 1.

Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$, $F:E\to\mathbb{R}^m$; $D\subset\mathbb{R}^p$, $\Phi:D\to E$; $H=F\circ\Phi:D\to\mathbb{R}^m$;

x_0 — внутренняя точка множества E; t_0 — внутренняя точка множества D; $x_0=\Phi(t_0)$.

F дифференцируемо в точке x_0, $A=dF(x_0)$; Φ дифференцируемо в точке t_0, $B=d\Phi(t_0)$;

$C=AB$.

Тогда отображение H дифференцируемо в точке t_0 и $dH(t_0)=C$.

Доказательство.

Мы должны доказать, что функция

$$\nu(s)=H(t_0+s)-H(t_0)-Cs$$

имеет порядок малости выше первого,

$$\nu(s)\underset{s\to 0}{=}o(\|s\|).$$

Возьмем произвольную последовательность

$$\{s_k\},\ s_k \neq 0,\ s_k \to 0$$

и убедимся в том, что

$$\frac{\nu(s_k)}{\|s_k\|} \to 0.$$

Положим $h_k = \Phi(t_0 + s_k) - \Phi(t_0) \to 0$, тогда $H(t_0 + s_k) - H(t_0) = F(x_0 + h_k) - F(x_0)$.

Отображение F дифференцируемо в точке x_0, его приращение представляется в виде

$$\begin{aligned} &F(x_0 + h) - F(x_0) = Ah + \beta_1(h)h^1 + \dots + \beta_n(h)h^n, \\ &\beta_1(h), \dots, \beta_n(h) \underset{h \to 0}{\to} 0,\ \beta_1(h) = \ldots = \beta_n(h) = 0 \end{aligned}.$$

поэтому можно написать

$$H(t_0 + s_k) - H(t_0) = Ah_k + \beta_1(h_k)h_k^1 + \dots + \beta_n(h_k)h_k^n.$$

Отображение Φ дифференцируемо в точке t_0,

$$\begin{aligned} &\Phi(t_0 + s) - \Phi(t_0) = Bs + \lambda(s), \\ &\lambda(s) = o(\|s\|). \end{aligned}$$

Для h_k получаются выражения $h_k = Bs_k + \lambda(s_k)$, а для приращения отображения H —

$$H(t_0 + s_k) - H(t_0) = Cs_k + A(\lambda(s_k)) + \beta_1(h_k)h_k^1 + \dots + \beta_n(h_k)h_k^n,$$

т.е.

$$\nu(s_k) = A(\lambda(s_k)) + \beta_1(h_k)h_k^1 + \dots + \beta_n(h_k)h_k^n.$$

Проведем оценки членов правой части.

$$\|A(\lambda(s_k))\| \le \|A\|\|\lambda(s_k)\|,$$

$$\frac{\|A(\lambda(s_k))\|}{\|s_k\|} \le \|A\|\frac{\|\lambda(s_k)\|}{\|s_k\|} \to 0.$$

$$\beta_i(h_k) \to 0\ (i = 1, \dots, n),$$

$$|h_k^i| \le \|h_k\| \le \|B\|\|s_k\| + \|\lambda(s_k)\|,$$

$$\frac{|h_k^i|}{\|s_k\|} \le \|B\| + \frac{\|\lambda(s_k)\|}{\|s_k\|} \to \|B\|,$$

последовательности $\left\{\frac{h_k^i}{\|s_k\|}\right\}_{k=1}^{\infty}$ $(i = 1, \dots, n)$ оказываются ограниченными. Мы приходим к заключению, что $\frac{\nu(s_k)}{\|s_k\|} \to 0$. Теорема доказана.

2⁰. Формулы для частных производных.

Пусть $h = f \circ \Phi$, тогда $h_j'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(\Phi(t))\varphi_j^{i\prime}(t)$. Целесообразно написать то же самое в других обозначениях. Пусть $z = f(x_1, \dots, x_n)$, а $x^1 = \varphi^1(t^1, \dots, t^p), \dots, x^n = \varphi^n(t^1, \dots, t^p)$, тогда для частных производных сложной функции имеют место формулы

$$\frac{\partial z}{\partial t^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t^j}, \ (j = 1, \dots, p).$$

3⁰. Инвариантность формы дифференциала.

Если $z = f\left(x^1, \dots, x^n\right)$, то для дифференциала пишут выражение

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x^n} dx^n, \qquad (*)$$

где $dx^1, \dots, dx^n$ — дифференциалы независимых переменных (это дифференциалы линейных функций $\pi^i : \pi^i(x) = x^i$, так что действуют они в соответствии с формулами $dx^i(h) = h^i$).

Если рассмотреть функции

$$x^1 = \varphi^1\left(t^1, \dots t^p\right), \dots, x^n = \varphi^n\left(t^1, \dots t^p\right)$$

и построить сложную функцию

$$z = f\left(\varphi^1\left(t^1, \dots t^p\right), \dots, \varphi^n\left(t^1, \dots t^p\right)\right),$$

то

$$dz = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial z}{\partial t^j} dt^j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t^j} dt^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x^i} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial x^i}{\partial t^j} dt^j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x^i} dx^i. \qquad (**)$$

Совпадение форм выражений (*) и (**) и называют инвариантностью дифференциала.

4⁰. Дифференцирование суммы, произведения, частного.

Теорема 2

Функции, полученные арифметическими операциями над дифференцируемыми функциями, дифференцируемы. Сохраняются правила дифференцирования:

$$d(f + g) = df + dg,$$

$$d(fg) = gdf + fdg,$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$$

Обсудим, например, процедуру дифференцирования произведения. Функцию fg можно представить в виде композиции отображений $F : F(u, v) = u\ v$ и $\Phi = (f, g)$. По теореме о дифференцируемости композиции функция fg дифференцируема и $d(fg) = dF(d\Phi)$. Но $dF = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv = vdu + udv$, так что $d(fg) = gdf + fdg$.

§ 4. Дифференцирование обратного отображения

Теорема 1

Пусть $F : U \to V$ — отображение окрестности $U \subset \mathbb{R}^n$ точки x_0 на окрестность $V \subset \mathbb{R}^n$ точки $y_0 = F(x_0)$; F непрерывно в точке x_0 и имеет обратное отображение $H = F^{-1} : V \to U$; H непрерывно в точке y_0.

Если F дифференцируемо в точке x_0 и имеет обратимый дифференциал $A = df(x_0)$, $B = A^{-1}$, то H дифференцируемо в точке y_0,

$$dH(y_0) = B.$$

Доказательство

A — обратимое линейное отображение, поэтому

$$m=\inf_{\|h\|=1}\|Ah\|>0.$$

Можно написать оценку

$$\|Ah\|\ge m\|h\|,$$

справедливую для любого h.

Запишем представление для приращения отображения F:

$$F(x_0+h)-F(x_0)=Ah+\alpha(h),\ \alpha(h)\underset{h\to0}{=}o(\|h\|)$$

Найдется такое $r>0$ что

$$0<\|h\|<r\ \Rightarrow\ \|\alpha(h)\|<\frac{m}{2}\|h\|,\ \|F(x_0+h)-F(x_0)\|\ge\frac{m}{2}\|h\|.$$

Найдется такое $\rho>0$, что $\|s\|<\rho\Rightarrow\|H(y_0+s)-H(y_0)\|<r$.

Положим $\nu(s)=H(y_0+s)-H(y_0)-B(s)$ и докажем, что

$$\nu(s)\underset{s\to0}{=}o(\|s\|).$$

Возьмем произвольную последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0<\|s_k\|<\rho,\ s_k\underset{k\to\infty}{\to}0$ и убедимся в том, что

$$\frac{\nu(s_k)}{\|s_k\|}\underset{k\to\infty}{\to}0.$$

Положим

$$h_k=H(y_0+s_k)-H(y_0)=H(y_0+s_k)-x_0,$$

тогда

$$h_k\ne0,\ h_k\underset{k\to\infty}{\to}0,$$

$$\nu(s_k)=h_k-Bs_k,$$

$$x_0+h_k=H(y_0+s_k),\ F(x_0+h_k)=y_0+s_k,$$

$$s_k=F(x_0+h_k)-F(x_0)=Ah_k+\alpha(h_k),$$

$$Bs_k=h_k+B(\alpha(h_k)),$$

$$\nu(s_k)=-B(\alpha(h_k)),\ \ \|\nu(s_k)\|\le\|B\|\|\alpha(h_k)\|,$$

$$\frac{\|\nu(s_k)\|}{\|s_k\|}\le\|B\|\frac{\|\alpha(h_k)\|}{\|h_k\|}\frac{\|h_k\|}{\|s_k\|}\le\|B\|\frac{\|\alpha(h_k)\|}{\|h_k\|}\frac{2}{m}\underset{k\to\infty}{\to}0.$$