## *Лекция 13     15.10.2024*

## $6^0$. Показательная функция

Пусть $a>1$.

К настоящему моменту мы определили степень с рациональным показателем.

$$r>0 \Rightarrow \quad a^r>1$$
$$r_1<r_2 \Rightarrow a^{r_1}<a^{r_2}$$

На множестве рациональных чисел можно определить функцию

$$f:\ f(r)=a^r .$$

Функция строго возрастает.

Можно установить непрерывность функции. Сейчас мы ограничимся доказательством соотношения $a^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$:

$$a=\left(1+\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\right)^n \geq n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right);\ 0<a^{\frac{1}{n}}-1\leq \frac{a}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

## Определение показательной функции

Пусть $x\in\mathbb{R}$. Для любых $p,q\in\mathbb{Q}$, для которых $p<x<q$ справедливо неравенство $a^p<a^q$. По аксиоме полноты

$$\exists y\in\mathbb{R}\ \forall p,q\ \ p<x<q \ \Rightarrow\ a^p\leq y\leq a^q$$

Такое число единственно. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists p,q\ \ p<x<q\ a^q-a^p<\varepsilon$$

Подберем $r_0>x$, положим $A=a^{r_0}$.

$$\forall p<x<q\ a^q-a^p=a^p\left(a^{q-p}-1\right)<A\left(a^{q-p}-1\right).$$

Найдется натуральное $n_0$, для которого $a^{\frac{1}{n_0}}-1<\frac{\varepsilon}{A}$.

Подберем $p < x < q$ так, чтобы $q - p < \frac{1}{n_0}$, получим неравенство

$a^q - a^p = a^p \left(a^{q-p} - 1\right) < a^{r_0} \left(a^{\frac{1}{n_0}} - 1\right) < A\frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$.

Теперь мы примем найденное число $y$ за значение показательной функции в точке $x$,

$$f(x) = y = a^x .$$

Заметим, что для $x \in \mathbb{Q}$ новое определение совпадает со старым.

Из проведенного построения сразу получаются соотношения

$$a^x = \sup_{p<x,\ p\in\mathbb{Q}} a^p,\ a^x = \inf_{q>x,\ q\in\mathbb{Q}} a^q,\ a^x = \lim_{r\to x,\ r\in\mathbb{Q}} a^r .$$

## Основные свойства показательной функции

1) Строгое возрастание.

Пусть $x_1 < x_2$. Подберем $q, p \in \mathbb{Q}$, $x_1 < q < p < x_2$. Тогда $a^{x_1} \le a^q < a^p \le a^{x_2}$.

2) Непрерывность.

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Подберем $q, p \in \mathbb{Q}$, $p < x_0 < q,\ a^q - a^p < \varepsilon$. Если $x \in (p,\ q)$, то $\left|a^x - a^{x_0}\right| < \varepsilon$.

3) $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$.

Пусть $p_n \underset{n\to\infty}{\to} x_1,\ q_n \underset{n\to\infty}{\to} x_2,\ p_n,\ q_n \in \mathbb{Q}$. Тогда $a^{p_n} a^{q_n} = a^{p_n + q_n}$. Предельный переход дает требуемое равенство.

Если $0 < a < 1$, положим $b = \frac{1}{a} > 1$ и определим показательную функцию соотношением

$$f(x) = a^x = \frac{1}{b^x} = b^{-x} .$$

В этом случае показательная функция оказывается строго убывающей.

Основную роль в анализе имеет показательная функция с основанием $e$, экспоненциальная функция:

$$f(x) = e^x .$$

## $7^0$. Логарифмическая функция

Экспоненциальная функция непрерывна и строго возрастает на $(-\infty, +\infty)$. Множество ее значений есть промежуток. Поскольку

$$e^x \underset{x\to-\infty}{\to} 0,\ e^x \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty,$$

то множеством значений является множество $(0, +\infty)$ положительных чисел. Функция, обратная к экспоненциальной, называется логарифмической,

$$g : g(y) = \ln y,\ y \in (0, +\infty).$$

Справедливы равенства

$$g(f(x)) = x,\ \ln e^x = x,\ \ x \in (-\infty, +\infty),$$
$$f(g(y)) = y,\ \ e^{\ln y} = y,\ y \in (0, +\infty).$$

Логарифмическая функция непрерывны и строго возрастает на $(0, +\infty)$, множество значений — $\mathbb{R}$.

Обратная функция к показательной с основанием $a$ называется логарифмической функцией по основанию $a$.

## $8^0$. Степенная функция с произвольным вещественным показателем.

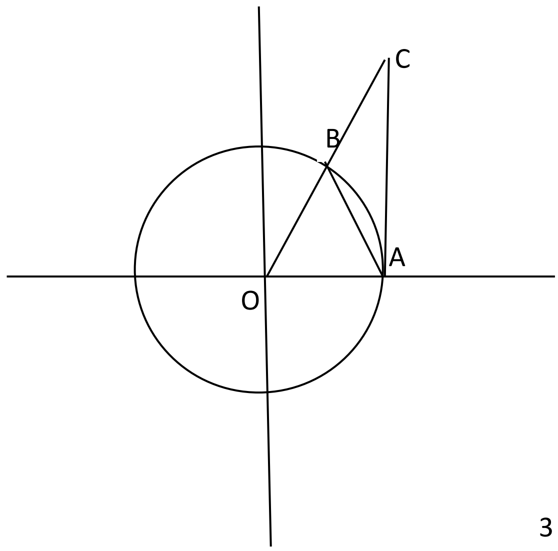
$$f :\ f(x) = x^\mu = e^{\mu \ln x},\ x \in (0, +\infty).$$

Функция непрерывна, возрастает, если $\mu > 0$, убывает, если $\mu < 0$, множество значений — $(0, +\infty)$

Если $\mu > 0$, степенную функцию доопределяют соотношением $f(0) = 0$.

# *§ 10. Тригонометрические функции*

**$1^0$.** $(\cos x, \sin x)$ — координаты точки $B$, в которую переходит точка $A(1, 0)$ при повороте на угол $x$ вокруг начала координат.




## $2^0$. Предложение 1

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \text{ при } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \qquad (1)$$

Действительно, из рисунка видно, что площади $S_1,\ S_2,\ S_3$ треугольника $OAB$, сектора $OAB$ и треугольника $OCB$ связаны неравенствами

$$S_1 < S_2 < S_3 .$$

Поскольку

$$S_1 = \frac{1}{2}\sin x,\ \ S_2 = \frac{1}{2}x,\ \ S_3 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x ,$$

то

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x .$$

Делением на $\sin x > 0$ получаем

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

и, наконец,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 .$$

## 3⁰. Предложение 2

$$\forall x \quad |\sin x| \le |x| . \qquad (2)$$

Действительно, для $x = 0$ неравенство очевидно, для $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ неравенство непосредственно следует из (1), для $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ обеспечивается четностью функций в нашем неравенстве. Если же $|x| \ge \frac{\pi}{2}$, неравенство становится очевидным, поскольку $|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2}$.

## 3⁰. Непрерывность

Непрерывность синуса следует из оценки

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \le |x - x_0| \underset{x\to x_0}{\to} 0 .$$

Поскольку

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

то непрерывность косинуса следует из теоремы о непрерывности композиции.

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, тангенс непрерывен во всех точках, где косинус отличен от нуля, т.е. во всех точках своей области определения.

# *§ 11. Замечательные пределы*

## I замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

## Доказательство

В предыдущем параграфе получено неравенство

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

По непрерывности

$$\cos x \underset{x\to 0}{\to} \cos 0 = 1,$$

по теореме о милиционерах

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1.$$

## Следствия

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{2}$.

Действительно,

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\to} 1\cdot 1 = 1,$$

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \operatorname{tg} x\left(1-\cos x\right) \underset{x\to 0}{\sim} x\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2}$$

## II замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e \qquad (2)$$

## Доказательство

По определению

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} e\,. \qquad (3)$$

1) Покажем, что

$$(1+x)^{1/x} \underset{x\to+0}{\to} e \qquad (4)$$

Для $x\in(0,\,1)$ подберем $n\in\mathbb{N}$ так, чтобы

$$\begin{gathered} n\le\frac{1}{x}<n+1,\\ \frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n} \end{gathered} \qquad (5)$$

Теперь

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<(1+x)^{1/x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=b_n\,, \qquad (6)$$

где $a_n \underset{n\to\infty}{\to} e,\ b_n \underset{n\to\infty}{\to} e$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Подберем номер $N$ так, чтобы

$$\forall n>N\ \ a_n>e-\varepsilon,\ \ b_n<e+\varepsilon \qquad (7)$$

Положим $\delta=\dfrac{1}{N+1}$. Пусть $x\in(0,\,\delta)$, подберем номер $n$ так, чтобы выполнялись неравенства (5). Тогда справедливы неравенства (6) и

$$n+1>\frac{1}{\delta}=N+1,\ \ n>N\,,$$

поэтому выполняются неравенства (7). Из (6), (7) получаем

$$e-\varepsilon<(1+x)^{1/x}<e+\varepsilon\,.$$

Соотношение (4) доказано.

2) Покажем, что

$$\left(1+x\right)^{1/x} \underset{x\to -0}{\to} e. \tag{8}$$

Возьмем произвольную последовательность $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in \left(-1,\ 0\right)$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, положим $y_n = -x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, $y_n > 0$. Тогда

$$\left(1+x_n\right)^{1/x_n} = \left(1-y_n\right)^{-1/y_n} = \left(\frac{1}{1-y_n}\right)^{1/y_n} = \left(1+\frac{y_n}{1-y_n}\right)^{1/y_n}.$$

Положим $z_n = \dfrac{y_n}{1-y_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ z_n > 0$. Заметим, что $\dfrac{1}{z_n} = \dfrac{1-y_n}{y_n} = \dfrac{1}{y_n} - 1$, поэтому можем написать

$$\left(1+x_n\right)^{1/x_n} = \left(1+z_n\right)^{1/z_n + 1} = \left(1+z_n\right)^{1/z_n}\left(1+z_n\right) \underset{n\to\infty}{\to} e\cdot 1 = e.$$

Имеет место соотношение (8).

## Следствия

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a\left(1+x\right)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1,\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x\right)^{\mu} - 1}{x} = \mu$.

## Доказательство.

Применим теорему о пределе композиции. Если $f\left(x\right) \underset{x\to x_0}{\to} A$, а $x = \varphi\left(t\right) \underset{t\to t_0}{\to} x_0$, то $F\left(t\right) = f\left(\varphi\left(t\right)\right) \underset{t\to t_0}{\to} A$ при выполнении одного из дополнительных условий:

$\varphi\left(t\right) \ne x_0$ при $t \ne t_0$,

$f$ непрерывна в точке $x_0$.

Если $\varphi$ взаимно однозначно отображает некоторую окрестность точки $t_0$ на окрестность точки $x_0$ и $\varphi\left(t\right) \underset{t\to t_0}{\to} \varphi\left(t_0\right) = x_0,\ \varphi^{-1}\left(x\right) \underset{x\to x_0}{\to} \varphi^{-1}\left(x_0\right) = t_0$, то соотношения

$$f\left(x\right) \underset{x\to x_0}{\to} A,\ F\left(t\right) \underset{t\to t_0}{\to} A$$

равносильны.

В такой ситуации можно писать

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{t \to t_0} f(\varphi(t)).$$

1) Поскольку

$$(1+x)^{1/x} \underset{x \to 0}{\to} e,$$

то с учетом непрерывности логарифма приходим к выводу

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{1/x} \underset{x \to 0}{\to} \ln e = 1.$$

2) В доказанном соотношении выполним замену переменной, полагая

$$x = e^t - 1.$$

$$\frac{\ln\left(1+\left(e^t-1\right)\right)}{e^t-1} \underset{t \to 0}{\to} 1, \quad \frac{t}{e^t-1} \underset{t \to 0}{\to} 1, \quad \frac{e^t-1}{t} \underset{t \to 0}{\to} 1$$

3)

$$(1+x)^{\mu} - 1 = e^{\mu \ln(1+x)} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \mu \ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} \mu x.$$