Лекция 12 11.10.2024

§ 6. Теорема Коши о промежуточном значении непрерывной функции

Теорема 1

Пусть функция f непрерывна на промежутке Δ, $a, b \in \Delta$, $a < b$, $f(a) \cdot f(b) < 0$ (в точках a, b функция f принимает значения разных знаков).

Тогда f принимает нулевое значение в некоторой точке интервала (a, b),

$$\exists c \in (a, b) \ f(c) = 0.$$

Доказательство.

Для определенности считаем, что $f(a) < 0,\ f(b) > 0$.

Положим

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\} \neq \varnothing,\ c = \sup E.$$

По свойству верхней грани

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in E \quad c - \frac{1}{n} < x_n \leq c.$$

Получена последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} c$, $f(x_n) < 0$. Предельный переход дает неравенство $f(c) \leq 0$.

Теперь видим, что $c < b$ и $f(x) \geq 0$ для всех $x \in (c, b)$. Переходя к пределу (при $x \to c + 0$), получаем неравенство $f(c) \geq 0$. Окончательно, $f(c) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2

Пусть функция f непрерывна на промежутке Δ, $a, b \in \Delta$, $A = f(a),\ B = f(b)$. Число C лежит между A, B.

Тогда f принимает значение C в некоторой точке c, лежащей между a, b.

Справедливость утверждения получается применением теоремы 1 к функции $g = f - C$.

Теорема 3.

Пусть функция f непрерывна на промежутке Δ.

Тогда $f(\Delta)$ — промежуток.

Доказательство.

Положим $A=\inf f(\Delta),\ B=\sup f(\Delta)$ и покажем, что $f(\Delta)$ — промежуток $\langle A,\ B\rangle$ с концами $A,\ B$.

Может случиться, что $A=B$, тогда $f(\Delta)=\{A\}$ — одноточечное множество, которое считается промежутком.

В случае, когда $A<B$, мы должны показать, что $(A,\ B)\subset f(\Delta)$.

Пусть $C\in(A,\ B)$, тогда $C<B=\sup f(\Delta)$, так что

$$\exists b\in\Delta\ \ f(b)>C\,.$$

Точно так же

$$\exists a\in\Delta\ \ f(a)<C\,.$$

По теореме 2

$$\exists c\in\Delta\ \ f(c)=C\,.$$

В теоремах 1–3 существенно используется непрерывность и свойства промежутка. Так, функция

$$f\,:\,f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

принимает положительные и отрицательные значения, но нигде не обращается в нуль. Причина — отсутствие непрерывности. То же самое можно сказать о функции

$$f\,:\,f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[0,\ 1],\\ 1, & x\in[2,\ 3],\end{cases}$$

определенной на множестве, не являющемся промежутком.

§ 7. Монотонные функции

1⁰ Теорема 1.

Пусть f — монотонная функция на промежутке Δ.

Для непрерывности функции f необходимо и достаточно, чтобы ее множество значений $\Delta'=f(\Delta)$ было промежутком.

Доказательство.

1) Необходимость. $\Delta' = f(\Delta)$ — непрерывный образ промежутка, Δ' — промежуток.

В части необходимости монотонность не используется.

2) Достаточность. Для определенности рассмотрим возрастающую функцию.

Может случиться, что промежуток значений Δ'— одноточечное множество. тогда f — постоянная, непрерывная.

Пусть $\Delta' = \langle A, B\rangle$. Пусть $x_0 \in \Delta,\ y_0 = f(x_0)$. Предположим, что $y_0 \in (A, B)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Подберем $y_1,\ y_2 \in (A, B)\colon y_1 < y_0 < y_2,\ y_2 - y_1 < \varepsilon$. Поскольку $y_1,\ y_2 \in (A, B)$, найдутся такие $x_1,\ x_2 \in \Delta$, что $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$. Из возрастания функции следует, что $x_1 < x_0 < x_2$, $(x_1,\ x_2)$ — окрестность точки x_0. Теперь

$$\forall x \in (x_1,\ x_2)\ y_1 \le f(x) \le y_2,$$

так что $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$. f непрерывна в точке x_0.

Если же y_0 — концевая точка промежутка Δ', например, $y_0 = B$, то, взяв $y_1 \in \Delta',\ B - y_1 < \varepsilon,\ x_1 \in \Delta,\ f(x_1) = y_1$, мы увидим, что $x_1 < x_0$ и

$$\forall x \in \Delta\ x > x_1 \Rightarrow y_1 \le f(x) \le B,\ \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon .$$

Опять обнаруживаем непрерывность функции f в точке x_0.

2⁰ Обращение строго монотонной функции.

Пусть f строго монотонна, например, строго возрастает, и непрерывна на промежутке Δ. Множество значений $\Delta' = f(\Delta)$ — промежуток. Из строгого возрастания следует инъективность отображения f. Построим обратную функцию $g = f^{-1} : \Delta' \to \Delta$. Функция g строго возрастает. Действительно, если допустить, что $y_1 < y_2$ а $x_1 = g(y_1) \ge g(y_2) = x_2$, то $y_1 = f(x_1) \ge f(x_2) = y_2$, вопреки предположению.

Теорема 2.

Пусть f строго монотонна и непрерывна на промежутке Δ.

Тогда обратная функция $g = f^{-1}$ непрерывна на промежутке $\Delta' = f(\Delta)$.

Доказательство.

Множество значений $\Delta = g(\Delta')$ монотонной функции g является промежутком. По теореме 2 функция g непрерывна на Δ'.

§ 8. Равномерная непрерывность функции

1⁰ Определение

Пусть f — функция, определенная на множестве E.

f называется равномерно непрерывной на E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x',\ x'' \in E\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow \left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon .$$

Для сравнения заметим, что непрерывность функции f во всех точках множества E (поточечная непрерывность) означает, что

$$\forall x' \in E\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x'' \in E\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow \left| f(x') - f(x'') \right| < \varepsilon .$$

Поточечная непрерывность допускает зависимость δ от x и ε, а равномерная непрерывность — только от ε.

2⁰ Примеры

1) Функция $f : f(x) = \sin\frac{1}{x},\ x \in (0, 1]$ поточечно непрерывна. Однако, в точках $x_n' = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$

она принимает значение $f(x_n') = 1$, а в точках $x_n'' = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ — значение $f(x_n'') = -1$,

$f(x_n') - f(x_n'') = 2$, хотя $x_n' - x_n'' \underset{n\to\infty}{\to} 0$. f не является равномерно непрерывной.

2) Функция $f : f(x) = x^2,\ x \in [0, +\infty)$ поточечно непрерывна, но не является равномерно непрерывной, поскольку

$$\forall \delta > 0\ f(x+\delta) - f(x) = (x+\delta)^2 - x^2 = 2x\delta + \delta^2 \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty .$$

3⁰ Теорема 1. Кантор.

Пусть функция f непрерывна на компакте K.

Тогда f равномерно непрерывна на K.

Частный случай. Если функция непрерывна на отрезке, то она и равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство.

Допустим, функция не является равномерно непрерывной,

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x',\ x'' \in K \ \left|x' - x''\right| < \delta \ \left|f\left(x'\right) - f\left(x''\right)\right| \geq \varepsilon ,$$

в частности,

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n',\ x_n'' \in K \ \left|x_n' - x_n''\right| < \frac{1}{n} \ \ \left|f\left(x_n'\right) - f\left(x_n''\right)\right| \geq \varepsilon .$$

Из последовательности $\left\{x_n'\right\}_{n=1}^{\infty}$ извлечем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k}' \underset{k\to\infty}{\to} x_0 \in K$.

Поскольку $\left|x_n' - x_n''\right| < \dfrac{1}{n}$, то и $x_{n_k}'' \underset{k\to\infty}{\to} x_0$. По непрерывности $f\left(x_{n_k}'\right),\ f\left(x_{n_k}''\right) \underset{k\to\infty}{\to} f\left(x_0\right)$, так что $f\left(x_{n_k}'\right) - f\left(x_{n_k}''\right) \underset{k\to\infty}{\to} 0$, но $\left|f\left(x_{n_k}'\right) - f\left(x_{n_k}''\right)\right| \geq \varepsilon > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

§ 9. Степенная, показательная, логарифмическая функции

1⁰. Степень с целым показателем

Определение

Пусть $n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$. Тогда

$$a^n = \underbrace{aa\cdots a}_{n} \quad \left(a^1 = a,\ a^{n+1} = a^n a\right).$$

Для $a \neq 0$ положим $a^0 = 1$, а $a^m = \dfrac{1}{a^{-m}}$ при $m \in \mathbb{Z},\ m < 0$.

Для степени с целым показателем справедливы следующие свойства:

1) $a^m a^n = a^{m+n}$;

2) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$;

3) $\left(ab\right)^n = a^n b^n$.

2⁰. Степенная функция с натуральным показателем

Пусть $n \in \mathbb{N}$, рассмотрим функцию

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f\left(x\right) = x^n .$$

Функция непрерывна по теореме о непрерывности произведения. f строго возрастает на $\left[0, +\infty\right)$ (если $0 \leq x_1 < x_2$, то

$$f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)=x_2^n-x_1^n=\left(x_2-x_1\right)\left(x_2^{n-1}+x_2^{n-2}x_1+\cdots+x_1^{n-1}\right)>0 \text{)}.$$

$$f\left(0\right)=0,\ \lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)+\infty .$$

По теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции множество значений функции f — промежуток, $f\left(\left[0,\ +\infty\right)\right)=\left[0,\ +\infty\right)$.

Дополнение. При четном n функция f четна, она убывает на $\left(-\infty,\ 0\right]$, $f\left(\left(-\infty,\ 0\right]\right)=\left[0,\ +\infty\right)$.

При нечетном n функция f нечетна, она возрастает на $\left(-\infty,\ +\infty\right)$, $f\left(\left(-\infty,\ +\infty\right)\right)=\left(-\infty,\ +\infty\right)$.

3⁰. Степенная функция с целым показателем

Если $m<0,\ m\in\mathbb{Z}$, то функция

$$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\ \ f\left(x\right)=x^m=\frac{1}{x^n}, \text{ где } n=-m\in\mathbb{N},$$

непрерывна во всех точках $x\neq 0$, строго убывает на $\left(0,\ +\infty\right)$.

4⁰. Корень n-й степени

Пусть $n\in\mathbb{N}$, тогда функция

$$f:\left[0,\ +\infty\right)\to\left[0,\ +\infty\right),\ \ f\left(x\right)=x^n,$$

является биекцией.

Обратная функция

$$g=f^{-1}:\left[0,\ +\infty\right)\to\left[0,\ +\infty\right)$$

называется корнем n-й степени. Для значений этой функции используются обозначения

$$g\left(y\right)=\sqrt[n]{y}=y^{1/n}.$$

По теореме об обращении строго монотонной функции корень непрерывен и строго возрастает на $\left[0,\ +\infty\right)$.

Справедливы равенства

$$\forall x\geq 0\ \sqrt[n]{x^n}=x,$$
$$\forall y\geq 0\ \left(\sqrt[n]{y}\right)^n=y.$$

5^0. Степенная функция с рациональным показателем

Пусть $r \in \mathbb{Q},\ r > 0,\ r = \dfrac{m}{n}$. определим степень числа $x > 0$ с рациональным показателем r формулой

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

Проверим корректность определения:

$$\text{если } r = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}\text{, то } u = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \overset{?}{=} \left(\sqrt[n_1]{x}\right)^{m_1} = v\,.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&mn_1 = m_1 n,\\
&u^{nn_1} = \left(u^n\right)^{n_1} = \left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^{mn}\right)^{n_1} = \left(\left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n}\right)^{m}\right)^{n_1} = x^{mn_1},\\
&v^{nn_1} = \left(v^{n_1}\right)^{n} = \left(\left(\sqrt[n_1]{x}\right)^{m_1 n_1}\right)^{n} = \left(\left(\left(\sqrt[n_1]{x}\right)^{n_1}\right)^{m_1}\right)^{n} = x^{m_1 n},\\
&u^{nn_1} = v^{nn_1},\ u = v.
\end{aligned}$$

Функция

$$f:\ f(x) = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = x^{\frac{m}{n}} = x^r$$

непрерывна (по теореме о непрерывности композиции) и строго возрастает на $[0, +\infty)$.

Если $r < 0$, функция

$$f(x) = \frac{1}{x^{-r}} = x^r$$

непрерывна и строго убывает на $(0, +\infty)$.

Для $a, b > 0$ и рациональных p, q имеем

1) $a^p a^q = a^{p+q}$;

2) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$;

3) $(ab)^p = a^p b^p$.

Проверим, например, 2).

Пусть $p=\frac{m}{n}$, $q=\frac{m_1}{n_1}$; $u=\left(a^p\right)^q$, $v=a^{pq}$. Тогда

$$u^{nn_1}=\left(\left(a^p\right)^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{nn_1}=\left(\sqrt[n_1]{a^p}\right)^{m_1nn_1}=\left(a^p\right)^{m_1n}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{mm_1n}=a^{mm_1},$$
$$v^{nn_1}=a^{mm_1},$$

так что $u=v$.