

Глава IV. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

§ 1. Основные понятия

1⁰. Линейное дифференциальное уравнение n -го порядка имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

$p_1, p_2, \dots, p_n; f$ — непрерывные функции на интервале (a, b) .

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением n -го порядка (соответствующим уравнению (1)).

2⁰. Задача Коши для д.у. (1) с начальными условиями

$$y|_{x_0} = y_0, y'|_{x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (\text{здесь } x_0 \in (a, b)) \quad (3)$$

состоит в построении решения $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$ д.у. (1), для которого

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

3⁰. **Теорема 1.** Задача Коши для д.у. (1) с начальными условиями (3) имеет единственное решение $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$.

Важным моментом является возможность определения этого решения на всем интервале (a, b) непрерывности коэффициентов и правой части д.у. (1).

§ 2. Линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \quad (1)$$

1⁰. **Линейный дифференциальный оператор.**

Посредством формулы

$$L\varphi = \varphi^{(n)} + p_1(x)\varphi^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\varphi \quad (2)$$

определим отображение

$$L : C^{(n)}(a, b) \rightarrow C(a, b)$$

пространства n раз непрерывно дифференцируемых функций $C^{(n)}(a, b)$ в пространство непрерывных функций $C(a, b)$.

Предложение

L — линейное отображение:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \quad L(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1L(\varphi_1) + \alpha_2L(\varphi_2).$$

2⁰. Линейное однородное дифференциальное уравнение в терминах линейного дифференциального оператора принимает вид

$$Ly = 0. \quad (3)$$

Теорема 1. Множество решений линейного однородного дифференциального уравнения есть ядро оператора L . Множество решений линейного однородного дифференциального уравнения — линейное пространство (относительно поточечных операций сложения и умножения на число над функциями), подпространство пространства $C^{(n)}(a, b)$.

§ 3. Линейная зависимость системы функций

1⁰. **Определение.** Набор функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$, определенных на интервале (a, b) , называется линейно зависимым, если существует ненулевой набор вещественных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, т.ч.

$$\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_m \varphi_m = 0. \quad (1)$$

Упражнение. Если $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ линейно зависимы на (a, b) , то $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ линейно зависимы на $(a_1, b_1) \subset (a, b)$.

2⁰. **Определитель Вронского.** Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ — $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемые функции. Функция

$$W : W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_m'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского, или вронскианом, системы функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$.

3⁰. **Теорема 1** Если система функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ линейно зависима, то она имеет нулевой вронскиан: $W = 0$.

Доказательство.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — набор чисел, т.ч.

$$\forall x \in (a, b) \quad \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) = 0.$$

Дифференцируя это равенство, получаем систему соотношений

$$\begin{cases} \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) = 0, \\ \alpha_1 \varphi_1'(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m'(x) = 0, \\ \dots \\ \alpha_1 \varphi_1^{(m-1)}(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m^{(m-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

Алгебраическая система линейных уравнений с определителем W имеет ненулевое решение $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. По теореме Крамера $\forall x \in (a, b) \quad W(x) = 0$.

Замечание. Условие $W = 0$ не является достаточным для линейной зависимости. Например, Функции $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$ имеют нулевой вронскиан, но образуют линейно независимую систему.

§ 4. Линейная зависимость системы решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \quad (1)$$

Теорема 1. Если в некоторой точке определитель Вронского системы n решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка равен нулю, то эта система решений линейно зависима.

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — решения д.у. (1), $\exists x_0 \in (a, b) \quad W(x_0) = 0$.

Тогда система функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно зависима.

Доказательство

Определитель $W(x_0)$ равен нулю, поэтому его столбцы линейно зависимы, существует ненулевой набор чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, т.ч.

$$\alpha_1 \varphi_1^{(k)}(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Положим $\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n$. Тогда φ — решение д.у. (1) и $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$, т.е. φ — решение задачи Коши для д.у. (1) с нулевыми начальными данными. По теореме единственности $\varphi = 0$. Система $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно зависима.

Следствие Альтернатива Вронского

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — решения д.у. (1), W — определитель Вронского.

Тогда $\forall x \in (a, b) \quad W(x) = 0$ или $\forall x \in (a, b) \quad W(x) \neq 0$.

Действительно, система $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ может быть линейно зависимой или линейно независимой.

В первом случае вронскиан оказывается нулевой функцией, а во втором не обращается в нуль ни в одной точке.

Формула Лиувилля. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — система n решений ЛДУ n -го порядка (1), W — определитель Вронского, $x_0 \in (a, b)$.

Тогда

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt} \quad (2)$$

Доказательство

Производная определителя равна сумме n определителей, в каждом из которых дифференцированию подвергнута одна строка. При дифференцировании определителя Вронского мы получаем $n-1$ определитель с двумя одинаковыми строками. Эти определители равны нулю. Таким образом,

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

Прибавим теперь к последней строке предыдущие, умноженные на $p_n(x), p_{n-1}(x), \dots, p_2(x)$ соответственно:

$$W'(x) = -p_1(x) \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = -p_1(x) W(x).$$

$W(x)$ — решение ЛОДУ 1-го порядка $z' + p_1(x)z = 0$, поэтому

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}.$$

§ 5. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (1)$$

1⁰. Теорема 1. Пространство решений ЛОДУ n -го порядка n -мерно.

Доказательство.

1) По теореме существования д.у. (1) имеет решения $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_i^{(j)}(x_0) = \begin{cases} 1, & j = i - 1 \\ 0, & j \neq i - 1 \end{cases} \quad (2)$$

Для этой системы решений

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

решения линейно независимы.

2) Любое решение φ д.у. (1) — линейная комбинация решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n$:

$$\varphi = \varphi(x_0)\varphi_1 + \varphi'(x_0)\varphi_2 + \dots + \varphi^{(n-1)}(x_0)\varphi_n \quad (3)$$

Действительно, пусть $\psi = \varphi(x_0)\varphi_1 + \varphi'(x_0)\varphi_2 + \dots + \varphi^{(n-1)}(x_0)\varphi_n$. ψ — решение д.у. (1),

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0), \psi'(x_0) = \varphi'(x_0), \dots, \psi^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0).$$

По теореме единственности $\psi = \varphi$.

Мы показали, что $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — базис пространства решений, пространство решений n -мерно.

2⁰. Определение. Базис пространства решений ЛОДУ называется фундаментальной системой решений (ФСР).

ФСР ЛОДУ n -го порядка — это линейно независимая система из n решений этого уравнения.

В п. 1⁰ построена ФСР, нормированная в точке x_0 .

3⁰. Теорема 2. Общее решение ЛОДУ.

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — ФСР ЛОДУ (1).

Тогда формула

$$y = C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) \quad (4)$$

дает общее решение ЛОДУ (1):

1) $\forall C_1, \dots, C_n$ $C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$ — решение ЛОДУ (1),

2) Для любого решения φ найдутся такие $C_1, \dots, C_n$, что $\varphi = C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$.

§ 6. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

$$Ly = 0 \quad (2)$$

1⁰. Теорема 1.

1) Если φ — решение уравнения (2), ψ_0 — решение уравнения (1), то $\psi = \psi_0 + \varphi$ — решение уравнения (1).

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= C_1'(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_n(x) + C_1(x)\varphi_1'(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n'(x) = \\ &= C_1(x)\varphi_1'(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n'(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi^{(n)}(x) &= C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n^{(n)}(x) = \\ &= f(x) + C_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n^{(n)}(x)\end{aligned}$$

Пример

$$xy'' + y' = 6x^5, \quad x > 0; \quad y'' + \frac{1}{x}y' = 6x^4.$$

Функции $\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)=\ln x$ образуют ФСР. Функции C_1, C_2 находим из системы

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1' + C_2' \ln x = 0, \quad C_1' = -6x^5 \ln x, \quad C_1 = -x^6 \ln x + \frac{1}{6}x^6 \\ C_2' \frac{1}{x} = 6x^4, \quad C_2' = 6x^5, \quad C_2 = x^6 \end{array} \right.$$

$$y = -x^6 \ln x + \frac{1}{6}x^6 + x^6 \ln x = \frac{1}{6}x^6.$$

Общее решение записываем в виде

$$y = \frac{1}{6}x^6 + C_1 + C_2 \ln x$$

3⁰. Принцип суперпозиции.

Пусть $\psi_j, j=1, \dots, m$ — решения уравнение $Ly = f_j$; $\psi = \alpha_1 \psi_1 + \dots + \alpha_m \psi_m$,

Тогда ψ — решение уравнения $Ly = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m$.