Лекция 12 14.03.2025

§ 2 Предел функции нескольких переменных

1^0. Функция нескольких переменных

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, f — вещественная функция, определенная на E. Функция f называется вещественной функцией n переменных. Для значения такой функции в точке $x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ используется обозначение $f(x) = f\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$.

Рассматриваются и отображения $F : E \to \mathbb{R}^m$. Для такого отображения значение в точке x записывается в виде

$$F(x) = \left(f^1(x), \ldots, f^m(x)\right),$$

где $f^1, \ldots, f^m$ — функции n переменных, называемые координатными функциями отображения F.

2^0. Предел функции нескольких переменных

Определение. Пусть f — функция, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, a — предельная точка множества E. Число A назовем пределом функции f при x, стремящемся к a вдоль множества E ($x \to a,\ x \in E$), и напишем $f(x) \underset{x \to a, x \in E}{\to} A,\ A = \lim\limits_{x \to a, x \in E} f(x)$, если

I. (на языке $\varepsilon - \delta$)
   $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon$.

II. (на языке окрестностей) для любой окрестности V точки A найдется такая окрестность U точки a, что $f\left(\dot{U} \cap E\right) \subset V$,

III. (на языке последовательностей) для любой последовательности $\{x_k\}$ элементов множества E, для которой $x_k \underset{k \to \infty}{\to} a,\ x_k \neq a$, имеет место соотношение $f(x_k) \underset{k \to \infty}{\to} A$.

Если множество E содержит некоторую проколотую окрестность точки a, в обозначении предела множество E явно не указывают.
Практически без изменений определение предела переносится на отображения со значениями в пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$F(x) \underset{x \to a}{\to} A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|F(x) - A\| < \varepsilon.$$

Отображение $F = \left(f^1, \ldots, f^m\right)$ имеет своим пределом элемент $A = \left(A^1, \ldots, A^m\right)$ в том и только в том случае, если $f^i(x) \underset{x \to a}{\to} A^i,\ i = 1, \ldots, m$.

3^0. Свойства предела.

1) Локальная ограниченность функции, имеющей пределы.
2) Единственность предела.
3) Арифметические операции над функциями, имеющими предел.
Пусть $f(x) \underset{x \to a}{\to} A,\ g(x) \underset{x \to a}{\to} B$.

Тогда $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\to} A+B$,

$f(x)\cdot g(x) \underset{x\to a}{\to} A\cdot B$,

если $B\neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} \dfrac{A}{B}$.

4) Предел и неравенства.

Стабилизация неравенств. Если $f(x) \underset{x\to a}{\to} A,\ g(x) \underset{x\to a}{\to} B$, $A<B$, то существует такая окрестность U точки a, что $\forall x\in \dot{U}\ f(x)<g(x)$.

Предельный переход в неравенстве. Если $\forall x\in \dot{U}\ f(x)\le g(x)$ и $f(x) \underset{x\to a}{\to} A,\ g(x) \underset{x\to a}{\to} B$, то $A\le B$.

Теорема о милиционерах. Если $\forall x\in \dot{U}\ f(x)\le h(x)\le g(x)$, $f(x),\ g(x) \underset{x\to a}{\to} A$, то $h(x) \underset{x\to a}{\to} A$.

Докажем, например, последнее утверждение. Возьмем произвольную последовательность $\{x_k\}$ элементов множества $\dot{U}$. Тогда $f(x_k)\le h(x_k)\le g(x_k)$. По определению предела $f(x_k),\ g(x_k) \underset{k\to\infty}{\to} A$. По теореме о милиционерах для числовых последовательностей $h(x_k) \underset{k\to\infty}{\to} A$. Таким образом, $h(x) \underset{x\to a}{\to} A$.

4⁰. Примеры

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$. Утверждение сразу получается из неравенства

$$0\le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\le \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=x^2+y^2 \underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\to} 0.$$

2) Функция $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ не имеет предела в точке $(0,0)$, поскольку при $x=0$ или $y=0$ функция принимает нулевое значение, а при $x=y$ — значение 1.

3) Функция $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ не имеет предела в точке $(0,0)$, поскольку при $x=0$ или $y=0$ функция принимает нулевое значение, при $x^2=y$ — значение 1.

5⁰. Другие предельные конструкции.

Предел по направлению. Пусть l — единичный вектор. $\lim\limits_{t\to +0} f(a+tl)$ называется пределом по направлению l. Предел по направлению — это предел функции f при стремлении $x\to a$ по лучу с направляющим вектором l.

Предложение. Если $f(x) \underset{x\to a}{\to} A$, то число A является пределом функции f по любому направлению.

Наличие одного и того же предела по всем направлениям — необходимое условие существования предела функции.

Вернемся к рассмотренным примерам функций, не имеющих предела. Для функции $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ и единичного вектора $l(\cos\alpha,\,\sin\alpha)$ имеем $f(t\cos\alpha,\,t\sin\alpha)=\sin 2\alpha$, функция имеет предел по любому направлению, но этот предел зависит от направления.

Функция $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ имеет нулевой предел по любому направлению

($f(t\cos\alpha,\,t\sin\alpha)=\dfrac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}\sim\dfrac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\sin^2\alpha}=t\dfrac{\cos^2\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha}\to 0$, если $\sin\alpha\neq 0$;
$f(t\cos\alpha,\,t\sin\alpha)=0$, если $\sin\alpha=0$).

Повторные пределы

$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ называются повторными пределами.

При некоторых дополнительных условиях функция, имеющая предел A, имеет и повторные пределы, причем эти повторные пределы равны A.

Пример. $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$. Числа (± 1) оказываются повторными пределами функции f.

Лекция 13 18.03.2025

§ 3 Непрерывные функции нескольких переменных

1^0. Определение непрерывной функции.

Пусть f — функция на $E\subset\mathbb{R}^n$, $x_0\in E$. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если выполнено одно из следующих условий:

I Определение на языке $\varepsilon-\delta$.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in E\quad \|x-x_0\|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon .$$

II Определение на языке окрестностей.

Для любой окрестности V точки $f(x_0)$ найдется такая окрестность U точки x_0, что $f(U\cap E)\subset V$.

III Определение на языке последовательностей.

Для любой последовательности $\{x_k\}$ элементов множества E, для которой $x_k\underset{k\to\infty}{\to}x_0$, имеет место соотношение $f(x_k)\underset{k\to\infty}{\to}f(x_0)$.

Если x_0 — предельная точка множества E, то непрерывность функции f в точке x_0, означает, что

$$f(x)\underset{\substack{x\to x_0\\ x\in E}}{\to}f(x_0).$$

Практически без изменений понятие непрерывности переносится и на отображения со значениями в $\mathbb{R}^m$.

Отображение $F:E\to\mathbb{R}^m$ непрерывно в точке x_0, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in E\quad \|x-x_0\|<\delta\Rightarrow\|F(x)-F(x_0)\|<\varepsilon.$$

Для непрерывности отображения F необходима и достаточна непрерывность его координатных функций.

2^0. Локальные свойства непрерывных функций и отображений.

1) Локальная ограниченность. Если функция f непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности U этой точки, т.е. множество $f(U\cap E)$ ограничено.

Если отображение F непрерывно в точке x_0, то оно ограничено в некоторой окрестности U этой точки.

2) Арифметические операции над непрерывными функциями приводят к новым непрерывным функциям. Если функции $f,\ g$ определены на множестве E и непрерывны в точке $x_0\in E$, то функции $F=f+g,\ G=f\cdot g$ тоже непрерывны в точке x_0. При дополнительном условии $g(x_0)\neq 0$ непрерывной будет и функция $H=f/g$.

3) Стабилизация неравенств. Если f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)>0$, то найдется такая окрестность U точки x_0, что

$$\forall x\in U\cap E\ \ f(x)>0.$$

4) Теорема о непрерывности композиции.

Теорема 1. Пусть $E\subset\mathbb{R}^n,\ F:E\to\mathbb{R}^m$, а $D\subset\mathbb{R}^p,\ \Phi:D\to E$. Образуем композицию $H=F\circ\Phi:D\to\mathbb{R}^p:H(t)=F(\Phi(t))$. Пусть $t_0\in D,\ x_0\in E,\ x_0=\Phi(t_0)$.

Тогда если отображение Φ непрерывно в точке t_0, а F непрерывно в точке x_0, то композиция H непрерывна в точке t_0.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $\{t_k\}$ элементов множества D, для которой $t_k\to t_0$. Положим $x_k=\Phi(t_k)$. Поскольку Φ непрерывно в точке t_0, то $x_k\to x_0$. Поскольку F непрерывно в точке x_0, то $F(x_k)\to F(x_0)$. Но $F(x_k)=H(t_k)$, а $F(x_0)=H(t_0)$, поэтому $H(t_k)\to H(t_0)$, что и означает непрерывность отображения H.

3^0. Глобальные свойства непрерывных функций.

Отображение

$$F:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

называется непрерывным, если оно непрерывно в каждой точке $x\in E$.

Теорема 2. Общее условие непрерывности.

Для того чтобы отображение было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы прообраз любого открытого множества был открытым множеством в E:

$$\forall D - \text{откр. } \exists G - \text{откр.}: F^{-1}(D)=G\cap E.$$

Доказательство.

Запишем определение непрерывности на языке окрестностей.

Отображение

$$F:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

называется непрерывным в точке $x_0\in E$, если

$$\forall V \text{ - окр. т. } y_0=F(x_0)\ \exists U \text{ - окр. т. } x_0: F(U\cap E)\subset V.$$

Необходимость. Пусть отображение F непрерывно, D — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^m$, $G_1 = F^{-1}(D)$. Покажем, что G_1 открыто в E. Для каждого $x \in G_1$ подберем открытую окрестность U_x этой точки, для которой $F(U_x \cap E) \subset D$, и рассмотрим открытое множество $G = \bigcup\limits_{x \in G_1} U_x$. Справедливо равенство $G \cap E = F^{-1}(D)$.

Достаточность. Для $x \in E$ положим $y = F(x)$. Возьмем произвольную окрестность V точки y, подберем открытую окрестность $V_1 \subset V$. По условию множество $U_1 = F^{-1}(V_1)$ открыто в E, т.е. существует такое открытое множество U, для которого $U_1 = U \cap E$. U как раз и выполнит роль окрестности, о которой идет речь в определении непрерывности.

Теорема 3. Непрерывный образ компакта есть компакт.

Пусть F непрерывно на компакте K. Тогда $F(K)$ — компакт.

Доказательство. Пусть $\{y_k\}$ — последовательность элементов множества $F(K)$. Для каждого k найдется такой $x_k \in K$, что $F(x_k) = y_k$. Из последовательности $\{x_k\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $x_{k_i} \to x_0 \in K$. По непрерывности $y_{k_i} \to y_0 = F(x_0) \in F(K)$.

Следствия.

I теорема Вейерштрасса. Непрерывная на компакте вещественная функция ограничена**.**

II теорема Вейерштрасса. Непрерывная на компакте вещественная функция достигает своих нижней и верхней граней, т.е. имеет наименьшее и наибольшее значения.

Теорема 4. Теорема Кантора

Непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна.

Если отображение F непрерывно на компакте K, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x_1, x_2 \in K \ \ \|x_1 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|F(x_1) - F(x_2)\| < \varepsilon .$$

Теорема 5. Теорема Коши о промежуточном значении непрерывной функции

Пусть f — непрерывная функция на линейно связном множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\Delta = f(G)$ — промежуток.

$$\forall A, B \in \Delta \ (A < B) \ \ \forall C \in (A,\ B) \ \exists c \in G \ \ f(c) = C .$$

Доказательство. Возьмем точки $a, b \in G$, для которых $f(a) = A,\ f(b) = B$, и соединим их путем $\gamma : [\alpha,\ \beta] \to G$. Функция $\eta = f \circ \gamma$ непрерывна на $[\alpha,\ \beta]$, $\eta(\alpha) = A < C < B = \eta(\beta)$. По теореме Коши для функции одной переменной найдется $t_0 \in (\alpha,\ \beta)$, для которой $\eta(t_0) = C$. Положим $c = \gamma(t_0)$, тогда $f(c) = f(\gamma(t_0)) = \eta(t_0) = C$. Теорема доказана.