Глава III. Дифференциальные уравнения высших порядков

§1. Основные понятия и определения

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1}$$

F — непрерывная функция в области $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

n раз непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, $x \in (a,b)$ называется решением дифференциального уравнения (1), если

$$\forall x \in (a,b)\ F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Уравнение

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{2}$$

называется дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

Задача Коши для дифференциального уравнения (2) состоит в отыскании решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y\big|_{x_0} = y_0,\ y'\big|_{x_0} = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}\big|_{x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Для дифференциального уравнения (1) добавляется условие

$$y^{(n)}\big|_{x_0} = y_0^{(n)}, \text{ где } F\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}\right) = 0.$$

§2. Существование и единственность решения задачи Коши

Теорема 1.

Пусть функция f непрерывно дифференцируема.

Тогда задача Коши для дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y\big|_{x_0} = y_0,\ y'\big|_{x_0} = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}\big|_{x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

имеет единственное решение

Дифференциальное уравнение

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{3}$$

сводится к уравнению (1) с помощью теоремы о неявной функции. Если $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}\right)$ уравнение (3) равносильно уравнению вида (1). Задача Коши имеет единственное решение.

§3. Понижение порядка дифференциального уравнения

1^0. Дифференциальное уравнение, не содержащее неизвестной функции

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

Замена неизвестной функции

$$z = y^{(k)} \tag{2}$$

приводит нас к уравнению

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0 \tag{3}$$

Порядок уравнения понижен на k единиц.

Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (1), то $z = \psi(x) = \varphi^{(k)}(x)$ — решение уравнения (3).

Если $z = \psi(x)$ — решение уравнения (3), а $y = \varphi(x)$ — решение уравнения

$$y^{(k)} = \psi(x), \tag{4}$$

то $y = \varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения (1).

Пример.

$$xy''' + y'' = 0 \qquad (x > 0).$$

$$z = y'', \quad xz' + z = 0,$$

$$z = \frac{C_1}{x},$$

$$y'' = \frac{C_1}{x},$$

$$y' = C_1 \ln x + C_2,$$

$$y = C_1 x \ln x + C_2 x + C_3.$$

2⁰. Дифференциальное уравнение, не содержащее независимой переменной

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{5}$$

Положим

$$z = y',\ z = z(y). \tag{6}$$

Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right) z = \frac{d^2 z}{dy^2} z^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 z, \tag{7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Подставляя (7) в (5), получим уравнение

$$F_1\left(y, z, \frac{dz}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}}\right) = 0. \tag{8}$$

Порядок уравнения понижен на единицу.

Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (5), то $z = \gamma(y) = \varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)$ — решение уравнения (8).

Если $z = \gamma(y)$ — решение уравнения (8), а $y = \varphi(x)$ — решение уравнения

$$y' = \gamma(y), \tag{9}$$

то $y = \varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения (5).

Проведем вычисления для $n = 3$. Наши дифференциальные уравнения принимают вид

$$F\left(y, y', y'', y'''\right) = 0 \tag{5*}$$

$$F\left(y,z,\frac{dz}{dy}z,\frac{d^2z}{dy^2}z^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 z\right)=0 \qquad (8^*)$$

Пусть $y=\varphi(x)$ — решение уравнения (5^*), т.е.

$$\forall x\in(a,b)\ \ F\left(\varphi(x),\varphi'(x),\varphi''(x),\varphi'''(x)\right)=0 .$$

Положим

$$\gamma(y)=\varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\gamma\left(\varphi(x)\right)=\varphi'(x),\\ &\gamma'\left(\varphi(x)\right)\gamma\left(\varphi(x)\right)=\varphi''(x),\\ &\gamma''\left(\varphi(x)\right)\gamma^2\left(\varphi(x)\right)+\gamma'^2\left(\varphi(x)\right)\gamma\left(\varphi(x)\right)=\varphi'''(x),\end{aligned}$$

и

$$F\left(\varphi(x),\gamma\left(\varphi(x)\right),\gamma'\left(\varphi(x)\right)\gamma\left(\varphi(x)\right),\gamma''\left(\varphi(x)\right)\gamma^2\left(\varphi(x)\right)+\gamma'^2\left(\varphi(x)\right)\gamma\left(\varphi(x)\right)\right)=0 .$$

Полагая $x=\varphi^{-1}(y)$, получаем

$$F\left(y,\gamma(y),\gamma'(y)\gamma(y),\gamma''(y)\gamma^2(y)+\gamma'^2(y)\gamma(y)\right)=0 ,$$

$z=\gamma(y)$ — решение уравнения (8^*).

Если $z=\gamma(y)$ — решение уравнения (8^*), а $y=\varphi(x)$ — решение уравнения $y'=\gamma(y)$, то $\varphi'(x)=\gamma\left(\varphi(x)\right)$ и мы приходим к выводу, что $y=\varphi(x)$ — решение уравнения (5^*).

Замечание. Выполняя замену $y'=z=z(y)$, мы исключаем из рассмотрения решения вида $y=const$. Вопрос о наличии таких решений следует рассмотреть отдельно.

Пример $y''=y'$. 1) $z=y',\ z'=z,\ z=C_1e^x,\ y'=C_1e^x,\ y=C_1e^x+C_2$.

2) Заметим, что постоянные функции являются решениями.

$z=y',\ z=z(y),\ z\dfrac{dz}{dy}=z,\ \dfrac{dz}{dy}=1,\ z=y+C_1,\ y'=y+C_1,\ y=C_2e^x-C_1$.

3^0. Дифференциальное уравнение с точной производной в левой части.

Речь идет о дифференциальном равнении вида

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0 , \qquad (10)$$

где

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=\frac{d}{dx}\left(\Phi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)\right). \qquad (11)$$

Фигурирующее здесь полное дифференцирование означает дифференцирование при условии, что $y=y(x)$,

$$\frac{d}{dx}\left(\Phi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}y'+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)}$$

Уравнение (10) сводится к семейству уравнений

$$\Phi\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)=C \qquad (12)$$

порядка $(n-1)$.

Пример $\dfrac{y''}{y'} - \dfrac{2yy'}{1+y^2} = 0$, $\left[\ln|y'| - \ln\left(1+y^2\right)\right]' = 0$, $\ln|y'| - \ln\left(1+y^2\right) = \ln C_1$, $\dfrac{y'}{1+y^2} = C_1$, $\operatorname{arctg} y = C_1 x + C_2$.

Если уравнение (10) не является уравнением с точной производной, можно попытаться умножить уравнение на интегрирующий множитель для формирования точной производной.

Примеры

1) $yy'' = y'^2$, $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{y'}{y}$, $\ln|y'| = \ln|C_1 y|$, $y' = C_1 y$, $y = C_2 e^{C_1 x}$.

2) $y'' = f(y)$, $2y'y'' = 2f(y)y'$, $y'^2 = 2\int f(y)\,dy + C_1$.