§ 7. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \tag{1}$$

$$Ly = 0,$$

$a_1, \ldots, a_n$ — числа.

1^0. Комплексные функции вещественного переменного.

Функция γ, определенная на промежутке Δ и принимающая комплексные значения:

$$\gamma : \Delta \to \mathbb{C}$$

называется комплексной функцией вещественного переменного. Такую функцию можно записать в виде $\gamma = \varphi + i\psi$, где φ, ψ — вещественные функции, называемые вещественной и мнимой частью комплексной функции: $\varphi = \operatorname{Re}\gamma, \psi = \operatorname{Im}\gamma$.

Дифференцирование комплексной функции производится покомпонентно:

$$\gamma' = \varphi' + i\psi'.$$

Мы можем применить к комплексной функции оператор L:

$$L\gamma = L\varphi + iL\psi$$

Если $L\gamma = 0$, назовем функцию γ решением дифференциального уравнения (1).

Можно и само уравнение считать комплексным, т.е. допустить, что $a_1, \ldots, a_n$ — комплексные числа.

Мы построим ФСР из функций вида $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, где λ — комплексное число.

2^0. Характеристический многочлен.

Многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \tag{2}$$

называется характеристическим многочленом дифференциального уравнения (1) и линейного дифференциального оператора L.

3^0. Построение ФСР в случае простых корней характеристического многочлена

Предложение 1.

Пусть

$$\varphi_0 : \varphi_0(x) = e^{\lambda_0 x} \quad \lambda_0 \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$L\varphi_0 = P(\lambda_0)\varphi_0, \left(\forall x \ \ (L\varphi_0)(x) = P(\lambda_0)\varphi_0(x)\right). \tag{3}$$

Доказательство.

$$\begin{array}{ll}
\varphi_0 & \mid a_n \\
\varphi_0' = \lambda_0\varphi_0 & \mid a_{n-1} \\
\varphi_0'' = \lambda_0^2\varphi_0 & \mid a_{n-2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \mid \\
\varphi_0^{(n)} = \lambda_0^n\varphi_0 & \mid 1 \\
\hline
L\varphi_0 = P(\lambda_0)\varphi_0 &
\end{array}$$

Предложение 2.

Пусть

$$\varphi : \varphi_0(x) = e^{\lambda_0 x} \quad \lambda_0 \in \mathbb{C}.$$

Тогда

$$\varphi_0 \text{ — решение} \Leftrightarrow P(\lambda_0) = 0.$$

Доказательство.

$$\varphi_0 \text{ — решение} \Leftrightarrow L\varphi_0 = 0 \Leftrightarrow P(\lambda_0)\varphi_0 = 0 \Leftrightarrow P(\lambda_0) = 0.$$

Предложение 3.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — попарно различные комплексные числа.

Тогда функции $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ линейно независимы (на любом промежутке).

Доказательство.

Рассмотрим определитель Вронского

$$W : W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \cdots & \cdots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \cdots & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \cdots & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x}.$$

Получился определитель Вандермонда $W(x) \neq 0$. Функции линейно независимы.

Теорема 1.

Пусть характеристический многочлен $P(\lambda)$ дифференциального уравнения (1) n-го порядка имеет n различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Тогда система функций

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots e^{\lambda_n x} \tag{*}$$

образует ФСР д.у.(1).

Доказательство.

По предложению 2 функции системы (*) — решения д.у. (1). По предложению 3 система (*) линейно независима. Система (*) состоит из n функций. (*)— базис пространства решений, ФСР.

4^0. Построение ФСР в случае кратных корней характеристического многочлена.

λ_0 — корень кратности k для многочлена $P(\lambda) \Leftrightarrow P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k Q(\lambda)$, $Q(\lambda)$ — многочлен, $Q(\lambda_0) \neq 0 \Leftrightarrow P(\lambda_0) = P'(\lambda_0) = \cdots = P^{(k-1)}(\lambda_0) = 0,\ P^{(k)}(\lambda_0) \neq 0$.

Предложение 4.

Пусть

$$\varphi_0(x) = \psi(x) e^{\lambda_0 x}.$$

Тогда

$$(L\varphi_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \psi^{(k)}(x) P^{(k)}(\lambda_0) e^{\lambda_0 x}.$$

Доказательство.

$$L\varphi_0(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\left(\varphi_0\right)^{(n-j)}(x)$$ (здесь

$a_0=1$).

$$L\varphi_0(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\sum_{k=0}^{n-j}C_{n-j}^{k}\psi^{(k)}(x)\left(e^{\lambda_0 x}\right)^{(n-j-k)}=\sum_{j=0}^{n}a_j\sum_{k=0}^{n-j}C_{n-j}^{k}\psi^{(k)}(x)\lambda_0^{n-j-k}e^{\lambda_0 x}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}a_jC_{n-j}^{k}\psi^{(k)}(x)\lambda_0^{n-j-k}e^{\lambda_0 x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\psi^{(k)}(x)}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}a_j(n-j)(n-j-1)\cdots(n-j-k+1)\lambda_0^{n-j-k}e^{\lambda_0 x}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\psi^{(k)}(x)}{k!}P^{(k)}(\lambda_0)e^{\lambda_0 x},$$

$$\left(P(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j\lambda^{n-j},\ P^{(k)}(x)=\sum_{j=0}^{n-k}a_j(n-j)(n-j-1)\cdots(n-j-k+1)\lambda^{n-j-k}\right).$$

Предложение 5.

Пусть λ_0 — корень кратности k для характеристического многочлена $P(\lambda)$.

Тогда функции

$$e^{\lambda_0 x},\ xe^{\lambda_0 x},\dots,x^{k-1}e^{\lambda_0 x} \text{ —}$$

решения д.у. (1).

Действительно, пусть $\varphi_0(x)=x^je^{\lambda_0 x},\quad j=0,\dots,k-1$.

По предложению 4

$$L\varphi_0(x)=\sum_{l=0}^{n}\frac{\left(x^j\right)^{(l)}}{l!}P^{(l)}(\lambda_0)e^{\lambda_0 x}$$

Если $l=0,1,\dots,k-1$, то $P^{(l)}(\lambda_0)=0$; если $l=k,k+1,\dots,n$, то $\left(x^j\right)^{(l)}=0$. Таким образом, все слагаемые равны нулю, $L\varphi_0=0$. $L\varphi_0$ — решение д.у. (1).

В предложении 5 для корня λ_0 кратности k указано k решений.

Теорема 2.

Пусть характеристический многочлен $P(\lambda)$ д.у. (1) имеет различные корни $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r$ кратностей $k_1,k_2,\dots,k_r$ $(k_1+\dots+k_r=n)$.

Тогда система функций

$$\begin{matrix} e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\dots,x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e^{\lambda_r x},\ xe^{\lambda_r x},\dots,x^{k_r-1}e^{\lambda_r x} \end{matrix} \qquad (**)$$

образует ФСР д.у. (1).

Доказательство.

Система (**) состоит из решений (по предложению 5).

Система (**) состоит из n функций.

Нужно доказать, что (**) линейно независима.

Доказательство проведем индукцией по r (по числу серий).

База индукции, $r=1$.

Рассмотрим функции $e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\dots,x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}$.

Допустим, $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2\, x e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_k x^{k_1 - 1} e^{\lambda_1 x} = 0 \quad \left(x \in (a,\, b)\right)$, тогда $C_1 + C_2\, x + \cdots + C_k x^{k_1 - 1} = 0$, многочлен степени не выше $(k_1 - 1)$-й имеет бесконечно много корней. Следовательно, этот многочлен — нулевой.

Индукционный переход. Пусть для системы (**) с r сериями линейная независимость установлена. Рассмотрим систему с $(r+1)$ сериями.

Образуем линейную комбинацию функций этой системы:

$$M_1(x) e^{\lambda_1 x} + \cdots + M_{r+1}(x) e^{\lambda_{r+1} x},\ M_j(x) \text{ — многочлен степени не выше } k_j - 1.$$

Допустим

$$M_1(x) e^{\lambda_1 x} + \cdots + M_{r+1}(x) e^{\lambda_{r+1} x} = 0 \quad \left(x \in (a,\, b)\right).$$

Тогда

$$M_1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_{r+1})x} + \cdots M_r(x) e^{(\lambda_r - \lambda_{r+1})x} + M_{r+1}(x) = 0 .$$

Заметим, что $\lambda_1 - \lambda_{r+1} \neq 0, \ldots, \lambda_r - \lambda_{r+1} \neq 0$.

Дифференцируем достаточное число раз:

$$N_1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_{r+1})x} + \cdots + N_r(x) e^{(\lambda_r - \lambda_{r+1})x} = 0,$$

$N_1, \ldots,\ N_r$ — многочлены тех же степеней, что и $M_1, \ldots,\ M_r$.

По индукционному предположению $N_1 = \cdots = N_r = 0$. Следовательно, $M_1 = \cdots = M_r = 0$.

Линейная комбинация сводится к одному слагаемому $M_{r+1}(x) e^{\lambda_{r+1} x}$.

$M_{r+1}(x) e^{\lambda_{r+1} x} = 0 \ \left(x \in (a,\, b)\right),\ M_{r+1}(x) = 0$. $M_{r+1}(x)$ — нулевой многочлен (см. $r = 1$).

(**) линейно независима.

Упражнение. Провести доказательство теоремы 2 по другой схеме. Если характеристический многочлен имеет $\lambda_0 = 0$ корнем кратности k , то функции $1, x, \ldots, x^{k-1}$ — решения д.у.(1). Если некоторое комплексное число λ_0 — корень кратности k для характеристического многочлена, положим в (1) $y = z e^{\lambda_0 x}$, получим ЛОДУ с постоянными коэффициентами $L_1 z = 0$, где $L_1 z = e^{-\lambda_0 x} L\left(z e^{\lambda_0 x}\right)$. Для характеристического многочлена $Q(\lambda)$ получается соотношение $Q(\lambda) = P(\lambda + \lambda_0)$. 0 — корень k -й кратности для $Q(\lambda)$. $1, x, \ldots, x^{k-1}$ — решения д.у. $L_1 z = 0$, $e^{\lambda_0 x},\ x e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_0 x}$ — решения д.у. (1).

5^0. Построение вещественной ФСР.

Пусть уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (1)$$

$$Ly = 0,$$

имеет вещественные коэффициенты $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Предложение 6.

Пусть функция $\gamma = \varphi + i\psi$ ($\varphi,\ \psi$ — вещественные функции) является решением д.у. (1) с вещественными коэффициентами.

Тогда $\varphi,\ \psi$ — решения д.у.(1).

Доказательство.

$L\gamma = L\varphi + iL\psi$. $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, поэтому $L\varphi,\ L\psi$ вещественны.

$$\gamma \text{ — решение} \Rightarrow L\gamma = 0 \Rightarrow L\varphi + iL\psi = 0 \Rightarrow L\varphi = 0,\ L\psi = 0 .$$

Итак, $\varphi,\ \psi$ — решения д.у.(1).

Теорема 3.
Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ — различные вещественные корни характеристического многочлена, $k_1, k_2, \dots, k_r$ — их кратности, $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots \alpha_s \pm i\beta_s$ — мнимые корни, $m_1, \dots, m_s$ — их кратности ($k_1 + \dots + k_r + 2(m_1 + \dots + m_s) = n$).
Тогда

$$\begin{array}{l}
e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
e^{\lambda_r x},\ xe^{\lambda_r x}, \dots, x^{k_r-1}e^{\lambda_r x} \\
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \dots, x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x \\
e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \dots, x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x,\ xe^{\alpha_s x}\cos\beta_s x, \dots, x^{m_s-1}e^{\alpha_s x}\cos\beta_s x \\
e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x,\ xe^{\alpha_s x}\sin\beta_s x, \dots, x^{m_s-1}e^{\alpha_s x}\sin\beta_s x
\end{array} \qquad (***)$$

образует ФСР д.у. (1).
Доказательство.
(***) получена из (**) заменой серий

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x}, \dots,\ x^{m-1}e^{\lambda x},$$
$$e^{\bar{\lambda} x},\ xe^{\bar{\lambda} x}, \dots,\ x^{m-1}e^{\bar{\lambda} x}$$

с невещественными $\lambda = \alpha + i\beta,\ \bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ сериями

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots,\ x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

$2m$ функций заменяются на $2m$ функций. Число функций в системе остается прежним. (***) включает в себя n функций.
Каждое решение д.у.(1) — линейная комбинация функций (**), но каждая функция (**) — линейная комбинация функций (***):

$$x^j e^{\lambda x} = x^j e^{\alpha x}\cos\beta x + ix^j e^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$x^j e^{\bar{\lambda} x} = x^j e^{\alpha x}\cos\beta x - ix^j e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Каждое решение д.у.(1) — линейная комбинация функций (***). (***) — n-элементная система образующих для n-мерного пространства решений д.у. (1), (***) — базис пространства решений, (***) — ФСР д.у. (1).

Пример.
Пусть характеристический многочлен имеет корни

$$\lambda_{1,2,3} = 0,\ \lambda_{4,5} = 3,\ \lambda_6 = 4,\ \lambda_{7,8,9,10} = \pm i,\ \lambda_{11,12} = 5 \pm 6i.$$

Комплексную ФСР можно составить из функций

$$1,\ x,\ x^2;\ e^{3x},\ xe^{3x};\ e^{4x};\ e^{ix},\ xe^{ix},\ e^{-ix},\ xe^{-ix};\ e^{(5+6i)x},\ e^{(5-6i)x}.$$

Соответствующая вещественная ФСР имеет вид

$$1,\ x,\ x^2;\ e^{3x},\ xe^{3x};\ e^{4x};\ \cos x,\ x\cos x,\ \sin x,\ x\sin x;\ e^{5x}\cos 6x,\ e^{5x}\sin 6x.$$

§ 8. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

$$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{1}$$

$$Ly = 0 \tag{2}$$

$a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$,

$P(\lambda)$ характеристический многочлен дифференциального оператора L.

1⁰. Предложение 1. $f(x) = M_l(x)e^{\lambda_0 x}$, M_l — многочлен степени l, λ_0 — комплексное число. Тогда 1) Если $P(\lambda_0) \neq 0$, то д.у. (1) имеет решение вида

$$y = \psi(x) = S_l(x)e^{\lambda_0 x}, \text{ где } S_l \text{ — многочлен степени } l.$$

2) Если λ_0 — корень кратности k для $P(\lambda)$, то решение можно найти в виде

$$y = \psi(x) = x^k S_l(x) e^{\lambda_0 x}$$

Доказатедьство

1) Дифференциальный оператор L переводит функции $x^j e^{\lambda_0 x}$ в

$$L\left(x^j e^{\lambda_0 x}\right) = P(\lambda_0) x^j e^{\lambda_0 x} + P'(\lambda_0) C_j^1 x^{j-1} e^{\lambda_0 x} + \cdots + P^{(j)}(\lambda_0) C_j^j e^{\lambda_0 x}, \text{ если } j \le n, \text{ и в}$$

$$L\left(x^j e^{\lambda_0 x}\right) = P(\lambda_0) x^j e^{\lambda_0 x} + P'(\lambda_0) C_j^1 x^{j-1} e^{\lambda_0 x} + \cdots + P^{(n)}(\lambda_0) C_j^n x^{j-n} e^{\lambda_0 x}, \text{ если } j \ge n.$$

Образы функций $e^{\lambda_0 x},\ xe^{\lambda_0 x}, \ldots,\ x^l e^{\lambda_0 x}$ выражаются через базисные элементы $e^{\lambda_0 x},\ xe^{\lambda_0 x}, \ldots,\ x^l e^{\lambda_0 x}$ пространства функций вида $f(x) = M_l(x)e^{\lambda_0 x}$ посредством треугольной матрицы с ненулевыми диагональными элементами $P(\lambda_0) \neq 0$. Следовательно, эти образы тоже образуют базис и любая функция вида $f(x) = M_l(x)e^{\lambda_0 x}$ является их линейной комбинацией:

$$f(x) = A_0 L\left(e^{\lambda_0 x}\right) + A_1 L\left(xe^{\lambda_0 x}\right) + \cdots + A_l L\left(x^l e^{\lambda_0 x}\right) = L\left(S_l(x) e^{\lambda_0 x}\right), \text{ где}$$

$$S_l(x) = A_0 + A_1 x + \cdots + A_l x^l.$$

2) Если λ_0 — корень кратности k для $P(\lambda)$, мы рассмотрим образы функций $x^k e^{\lambda_0 x},\ x^{k+1} e^{\lambda_0 x}, \ldots,\ x^{k+l} e^{\lambda_0 x}$. Можем написать формулы

$$L\left(x^{k+j} e^{\lambda_0 x}\right) = P^{(k)}(\lambda_0) C_{k+j}^k x^j e^{\lambda_0 x} + P^{(k+1)}(\lambda_0) C_{k+j}^{k+1} x^{j-1} e^{\lambda_0 x} + \cdots + P^{(k+j)}(\lambda_0) C_{k+j}^{k+j} e^{\lambda_0 x}, \text{ если } k + j \le n, \text{ и}$$

$$L\left(x^{k+j} e^{\lambda_0 x}\right) = P^{(k)}(\lambda_0) C_{k+j}^k x^j e^{\lambda_0 x} + P^{(k+1)}(\lambda_0) C_{k+j}^{k+1} x^{j-1} e^{\lambda_0 x} + \cdots + P^{(n)}(\lambda_0) C_{k+j}^n x^{k+j-n} e^{\lambda_0 x}, \text{ если}$$

$k + j \ge n$.

Система образов $x^k e^{\lambda_0 x},\ x^{k+1} e^{\lambda_0 x}, \ldots,\ x^{k+l} e^{\lambda_0 x}$ опять формируется из базиса $e^{\lambda_0 x},\ xe^{\lambda_0 x}, \ldots,\ x^l e^{\lambda_0 x}$ с помощью треугольной матрицы с ненулевыми диагональными элементами.

2⁰. Предложение 2. Мы рассматриваем д.у. (1) с вещественными коэффициентами. Комплексная функция $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ — решение д.у. $Ly = f = f_1 + if_2$ в том и только в том случае, если ψ_1 — решение $Ly = f_1$, ψ_2 — решение $Ly = f_2$.

Доказательство

Поскольку уравнение имеет вещественные коэффициенты, то для вещественных функций $\psi_{1,2}$ функции $L\psi_{1,2}$ вещественны. Таким образом,

ψ —решение д.у. $Ly=0 \Leftrightarrow L\psi = f \Leftrightarrow L\psi_1 + iL\psi_2 = f_1 + if_2 \Leftrightarrow \begin{cases} L\psi_1 = f_1 \\ L\psi_2 = f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \psi_1$ — решение $Ly = f_1$, ψ_2 — решение $Ly = f_2$.

3⁰. Предложение 3. $f(x) = e^{\alpha x}\left(M_l(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x\right)$, M_l — многочлен степени l, N_m — многочлен степени m, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0$.

Тогда 1) если $P(\alpha \pm i\beta) \neq 0$, то д.у. (1) имеет решение вида

$$y = \psi(x) = e^{\alpha x}\left(S_\nu(x)\cos\beta x + T_\nu(x)\sin\beta x\right),$$

$S_\nu,\ T_\nu$ — многочлены степени $\nu = \max\{l,\ m\}$,

2) если каждое из чисел $\alpha \pm i\beta$ является корнем кратности k, то решение следует искать в виде

$$y = \psi(x) = x^k e^{\alpha x}\left(S_\nu(x)\cos\beta x + T_\nu(x)\sin\beta x\right).$$

Доказательство

Рассмотрим уравнение

$$Ly = \left(M_l(x) - iN_m(x)\right)e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

По Предложению 1 оно имеет решение вида

$$\psi(x) = x^k U_\nu(x) e^{(\alpha+i\beta)x} = x^k\left(S_\nu(x) - iT_\nu(x)\right)e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right).$$

По Предложению 2 функция

$$\psi_1(x) = \mathrm{Re}\,\psi(x) = x^k e^{\alpha x}\left(S_\nu(x)\cos\beta x + T_\nu(x)\sin\beta x\right)$$

является решением уравнения с правой частью

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(M_l(x)\cos\beta x + N_m(x)\sin\beta x\right).$$

Примеры

1) $y'' - 2y' + y = e^{2x} + e^x$, $y = e^{2x} + \dfrac{1}{2}x^2 e^x$

2) $y'' + a^2 y = \cos\omega x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

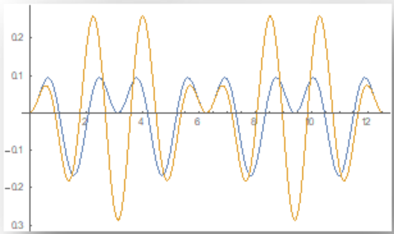
Решение ищем в виде $y = A\cos ax + B\sin ax$. подстановка в уравнение дает

$$\left(a^2 - \omega^2\right)A\cos\omega x + \left(a^2 - \omega^2\right)B\sin\omega x = \cos\omega x$$

Если $a \neq \omega$, следует взять $A = \dfrac{1}{a^2 - \omega^2}$, $B = 0$. Общее решение дается формулой

$y = \dfrac{1}{a^2 - \omega^2}\cos\omega x + C_1\cos ax + C_2\sin ax$, а решение задачи Коши — формулой

$$\frac{1}{4^2-2^2}(\cos 2x-\cos 4x),\ \frac{1}{4^2-3^2}(\cos 3x-\cos 4x)$$



$$y=\frac{1}{a^2-\omega^2}(\cos\omega x-\cos ax).$$

Если $a=\omega$, решение следует искать в виде $y=x\left(A\cos ax+B\sin ax\right)$. В таком случае $y''=-x\left(Aa^2\cos ax+Ba^2\sin ax\right)+2\left(-Aa\sin ax+Ba\cos ax\right)$. Подстановка в уравнение дает $2\left(-Aa\sin ax+Ba\cos ax\right)=\cos ax$, $A=0,\ B=\dfrac{1}{2a}$. Функция $y=\dfrac{x}{2a}\sin ax$ является решением задачи Коши. Заметим, что $\dfrac{1}{a^2-\omega^2}(\cos\omega x-\cos ax)\underset{\omega\to a}{\to}\dfrac{x}{2a}\sin ax$, решение непрерывно зависит от параметра.

$$\frac{x}{8}\sin 4x$$