Лекция 11   08.10.2024

§ 4 Открытые и замкнутые множества. Компакты

1⁰. Определение 1.

Пусть $E \subset \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$.

1) x_0 называется внутренней точкой множества E, если

$$\exists \delta > 0\ \left(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\right) \subset E;$$

2) x_0 называется внешней точкой множества E, если

$$\exists \delta > 0\ \left(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\right) \cap E = \varnothing;$$

3) x_0 называется граничной точкой множества E, если она не является ни внутренней, ни внешней.

Пример. $E = [1, 3)$, 2 — внутренняя точка, $0,\ 4$ — внешние точки, $1,\ 3$ — граничные точки.

x_0 — внутренняя точка множества E $\Leftrightarrow$ E — окрестность точки x_0. Внутренние точки входят в множество. Внешние точки множества E — это внутренние точки дополнения $\mathbb{R} \setminus E$, они не являются точками множества E.

x_0 — граничная точка множества E
$\Leftrightarrow \forall \delta > 0\ \left(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\right) \cap E \neq \varnothing,\ \left(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta\right) \cap \left(\mathbb{R} \setminus E\right) \neq \varnothing$. Граничная точка может быть точкой множества, а может и не быть ею.

2⁰. Определение 2.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$.

1) Множество E называется открытым, если оно состоит из внутренних точек.

2) Множество E называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

Примеры. Интервал — открытое множество, отрезок — замкнутое множество, полуинтервал не является ни открытым, ни замкнутым.

Множество $\operatorname{Int} E$, состоящее из всех внутренних точек множества E, называется его внутренностью. Это наибольшее открытое подмножество множества E.

Множество $\overline{E}$, полученное из E присоединением всех граничных точек, называется его замыканием. Замыкание — наименьшее замкнутое множество, содержащее данное множества. Точки замыкания $\overline{E}$ называются точками прикосновения множества E.

Предложение

Множество E является замкнутым в том и только в том случае, если оно содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей.

Доказательство.

1) Пусть E замкнуто, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, $x_n \in E$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$. Тогда любая окрестность точки x_0 содержит члены последовательности, пересекается с E, x_0 — внутренняя или граничная точка, $x_0 \in E$.

2) Пусть E содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей. Возьмем граничную точку x_0.

$$\forall n \ \exists x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n} \right) \cap E .$$

Получаем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $x_n \in E$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$. По условию $x_0 \in E$. Видим, что любая граничная точка оказывается элементом множества E. E — замкнутое множество.

3⁰. Определение 3.

Пусть $K \subset \mathbb{R}$.

Множество K называется компактом, если всякая последовательность его элементов содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу K.

Теорема 1

Для того, чтобы множество $K \subset \mathbb{R}$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.

Доказательство.

1) Необходимость. Пусть K — компакт. Если K не является ограниченным, то оно содержит бесконечно большую последовательность, которая не имеет сходящихся подпоследовательностей.

Чтобы установить замкнутость, достаточно показать, что K содержит пределы всех своих сходящихся последовательностей. Возьмем последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in K$, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$. По условию эта последовательность имеет подпоследовательность $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} y_0 \in K$. По теореме о пределе подпоследовательности $y_0 = x_0$, так что $x_0 \in K$, K — замкнуто.

2) Достаточность. Пусть K ограничено и замкнуто. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов множества K. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, по принципу выбора

Больцано-Вейерштрасса она имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0$. По критерию замкнутости $x_0 \in K$.

Пример. Отрезок $[a,\, b]$ — компакт.

§ 5. Теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на отрезке

Теорема 1. Непрерывный образ компакта есть компакт.

Пусть f — непрерывная функция на компакте K.

Тогда $f(K)$ — компакт.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность элементов множества $f(K)$:

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty},\ y_n \in f(K).$$

Для каждого номера n найдется $x_n \in K$, для которого $y_n = f(x_n)$. Из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов компакта K извлекаем сходящуюся последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0 \in K$. Полагая $y_{n_k} = f(x_{n_k})$, получаем подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая по непрерывности сходится к $y_0 = f(x_0)$, $y_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} y_0$. Таким образом, каждая последовательность обладает подпоследовательностью, сходящейся к элементу множества значений, последнее множество — компакт.

Теорема 2. I теорема Вейерштрасса

Если f непрерывна на отрезке $[a,\, b]$, то f — ограничена.

Доказательство.

Уже отмечено, что $[a,\, b]$ —компакт. По Теореме 1 $f([a,\, b])$ — компакт. По теореме 1 § 4 $f([a,\, b])$ — ограниченное множество, т.е. f — ограниченная функция.

Теорема 3. II теорема Вейерштрасса.

Если f непрерывна на отрезке $[a,\, b]$, то f имеет наименьшее и наибольшее значения.

Доказательство.

По Теореме 2 $f([a,\, b])$ — ограниченное множество. Положим $M = \sup f([a,\, b])$. Если мы найдем $x_0 \in [a,\, b]$, для которого $f(x_0) = M$, то x_0 как раз и окажется точкой наибольшего значения. Допустим, такой точки нет, $\forall x \in [a,\, b]\;\; f(x) < M$. Тогда мы можем определить функцию

$$\varphi : \varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}\,.$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a,\, b]$ и по Теореме 2 она ограничена:

$$\exists \mathrm{E} > 0 \quad \forall x \in [a,\, b]\; \varphi(x) \le \mathrm{E},$$

$$\frac{1}{M - f(x)} \le \mathrm{E},\;\; M - f(x) \ge \frac{1}{\mathrm{E}},$$

$$f(x) \le M - \frac{1}{\mathrm{E}} < M,$$

что противоречит определению $M = \sup f([a,\, b])$ числа M .

Противоречие заставляет нас отвергнуть сделанное допущение и признать, что функция f достигает в некоторой точке своего наибольшего значения M .

(Другое доказательство. $f([a,\, b])$ — компакт. Следовательно, $f([a,\, b])$ — ограниченное множество.

Положим, $M = \sup f([a,\, b])$. Поскольку $f([a,\, b])$ замкнуто, то $M \in f([a,\, b])$,

$$\exists x_0 \in [a,\, b]\; f(x_0) = M\,.$$

В точке x_0 функция f принимает свое наибольшее значение M).

Примеры

Функция $f:\, f(x) = \frac{1}{x},\; x \in (0,\, 1]$ непрерывна, но не является ограниченной; функция $f:\, f(x) = \frac{1}{x},\; x \in [1,\, +\infty)$ ограничена, но не имеет наименьшего значения.