§ 7 Основные понятия векторного анализа и теории поля

1^0 Пусть G — область в трехмерном пространстве. Числовые и векторные функции в G называют еще числовыми (скалярными) и векторными полями. Эти поля играют первостепенную роль во многих естественнонаучных приложениях анализа.

С числовыми и векторными полями свяжем дифференциальные формы.

Числовое поле f является 0-формой.

Векторному полю $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ поставим в соответствие дифференциальную форму

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 = A_x dx + A_y dy + A_z dz, \tag{1}$$

действующую по правилу $\omega_{\mathbf{A}}^1(\xi) = (\mathbf{A}, \xi)$. (Здесь $(\mathbf{A}, \xi)$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{A}$ и ξ).

Векторному полю $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$ поставим в соответствие дифференциальную форму

$$\omega_{\mathbf{B}}^2 = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy, \ \omega_{\mathbf{B}}^2(\xi_1, \xi_2) = (\mathbf{B}, \xi_1, \xi_2), \tag{2}$$

($(\mathbf{B}, \xi_1, \xi_2)$ — смешанное произведение векторов $\mathbf{B}, \xi_1, \xi_2$).

Числовому полю ρ поставим в соответствие дифференциальную форму

$$\omega_{\rho}^3 = \rho\, dx \wedge dy \wedge dz = \rho dV. \tag{3}$$

Аппарат дифференциальных форм позволяет единообразно описывать операции над различными полями.

Предложение

1) Линейной комбинации полей отвечает соответствующая линейная комбинация дифференциальных форм.

2)
$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1 = \omega_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}^2. \tag{4}$$

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^2 = \omega_{(\mathbf{A},\mathbf{B})}^3. \tag{5}$$

Внешнему умножению линейных форм отвечает векторное умножение соответствующих векторных полей; внешнему умножению линейной формы на 2-форму отвечает скалярное умножение.

Доказательство. Первое утверждение не вызывает сомнений.

Докажем соотношение (4). Пусть

$$\omega^1_{\mathbf{A}} = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$
$$\omega^1_{\mathbf{B}} = B_x dx + B_y dy + B_z dz\ .$$

Тогда

$$\omega^1_{\mathbf{A}} \wedge \omega^1_{\mathbf{B}} = \left(A_y B_z - B_y A_z\right) dy \wedge dz + \left(A_z B_x - B_z A_x\right) dz \wedge dx + \left(A_x B_y - B_x A_y\right) dx \wedge dy\ .$$

Выражения в скобках — координаты векторного произведения $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, так что формула (4) доказана.

Докажем (5). Пусть

$$\omega^1_{\mathbf{A}} = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$
$$\omega^2_{\mathbf{B}} = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy,$$

Тогда

$$\omega^1_{\mathbf{A}} \wedge \omega^2_{\mathbf{B}} = \left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right) dx \wedge dy \wedge dz = \left(\mathbf{A}, \mathbf{B}\right) dV\ .$$

2^0 Дифференциальные операции теории поля

Внешнее дифференцирование форм объединяет различные дифференциальные операции теории поля.

Пусть f — функция, тогда $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ — 1-форма, соответствующая векторному полю

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\ , \tag{6}$$

называемому градиентом числового поля f.

Если $\mathbf{A}$ — векторное поле, $\omega^1_{\mathbf{A}}$ — соответствующая 1-форма, то $d\omega^1_{\mathbf{A}}$ — 2-форма, отвечающая векторному полю

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \tag{7}$$

называемому ротором поля $\mathbf{A}$.

Наконец, если $\mathbf{B}$ — векторное поле, $\omega^2_{\mathbf{B}}$ — 2-форма, то $d\omega^2_{\mathbf{B}}$ — 3-форма, связанная с числовым полем

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\ \text{—} \tag{8}$$

дивергенцией векторного поля $\mathbf{B}$.

Операции grad, rot, div соответствуют внешнему дифференцированию дифференциальных форм.

Если положить $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$, то можно написать символические формулы

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f,\ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A},\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} = (\nabla,\ \mathbf{B}). \tag{9}$$

3^0 Дифференциальные операции второго порядка

Свойство внешнего дифференцирования $d(d\omega) = 0$ в терминах числовых и векторных полей принимает вид

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0,\ \ \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{0}. \tag{10}$$

В последних формулах представлены дифференциальные операции второго порядка.

Можно рассмотреть еще три дифференциальные операции второго порядка:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f,\ \ \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B},\ \ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}.$$

Для первой из них имеем выражение

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f\ \text{—} \tag{11}$$

оператор Лапласа для функции f. Можно символически написать $\Delta = (\nabla,\ \nabla)$.

Оператор Лапласа можно применять и к векторным полям. Это позволяет связать две оставшиеся операции второго порядка формулой

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}. \tag{12}$$

$$(\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla,\ \mathbf{A}) - (\nabla,\ \nabla)\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}\ ).$$

§ 8 Интегральные формулы векторного анализа

1^0 Векторная запись дифференциальных форм $\omega^1_{\mathbf{A}}$, $\omega^2_{\mathbf{B}}$ и интегралов

$\mathbf{A}$ — векторное поле, γ — гладкий путь, $\mathbf{l}(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ — единичный касательный вектор. Тогда интеграл от дифференциальной формы $\omega^1_{\mathbf{A}}$ можно записать в виде

$$\int_\gamma \omega^1_{\mathbf{A}} = \int_\gamma A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_\gamma \left(A_x \cos\lambda + A_y \cos\mu + A_z \cos\nu\right) dl = \int_\gamma (\mathbf{A}, \mathbf{l})\, dl. \tag{1}$$

$\int_\gamma (\mathbf{A}, \mathbf{l})\, dl$ называется работой поля вдоль пути γ. Работа $\oint_\gamma (\mathbf{A}, \mathbf{l})\, dl$ вдоль замкнутого пути называется циркуляцией.

Для векторного поля $\mathbf{B}$ и гладкой поверхности S с единичной нормалью $\mathbf{n}$ интеграл от дифференциальной формы $\omega_{\mathbf{B}}^2$ представим формулой

$$\begin{aligned}\iint_S \omega_{\mathbf{B}}^2 &= \iint_S B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy = \\ &= \iint_S \left(B_x \cos\lambda + B_y \cos\mu + B_z \cos\nu\right) d\sigma = \iint_S (\mathbf{B}, \mathbf{n})\, d\sigma.\end{aligned} \tag{2}$$

$\iint_S (\mathbf{B}, \mathbf{n})\, d\sigma$ называется потоком поля $\mathbf{B}$ через ориентированную поверхность $(S, \mathbf{n})$.

Если $\mathbf{B}$ — поле скоростей жидкости, то интеграл $\iint_S (\mathbf{B}, \mathbf{n})\, d\sigma$ дает количество жидкости, протекающее за единицу времени через поверхность S в направлении ориентирующей нормали $\mathbf{n}$.

2^0 Формула Стокса

Циркуляция вектора $\mathbf{A}$ по контуру Γ равна потоку $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ через поверхность S, имеющую Γ своим краем при согласованных ориентациях S и $\Gamma = \partial S$:

$$\oint_\Gamma (\mathbf{A}, \mathbf{l})\, dl = \iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{A}, \mathbf{n})\, d\sigma. \tag{3}$$

3^0 Формула Остроградского

Поток векторного поля $\mathbf{B}$ в направлении внешней нормали замкнутой поверхности S равен интегралу от дивергенции векторного поля $\mathbf{B}$ по телу G, ограниченному поверхностью S:

$$\oiint_{S^+} (\mathbf{B}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iiint_G \operatorname{div}\mathbf{B}\, dV. \tag{4}$$

§ 9 Потенциальное векторное поле

Определение

Векторное поле $\mathbf{A}$ называется потенциальным, если существует скалярное поле u, такое что $\mathbf{A} = \operatorname{grad} u$. Скалярное поле u называется потенциалом векторного поля $\mathbf{A}$.

Пример

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad u = -\frac{1}{r}.$$

Если $\mathbf{A}$ — потенциальное поле, то $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A}$ — безвихревое поле.

Работа потенциального поля вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_\gamma (\mathbf{A}, \mathbf{l})\, dl = u(M_1) - u(M_0),$$

для пути γ, соединяющего точку M_0 с точкой M_1.

Если $\mathbf{A}$ — потенциальное поле, то работа не зависит от пути (формула Ньютона-Лейбница), циркуляция по любому замкнутому пути равна нулю.

Наоборот, предполагая независимость работы от пути, можно корректно определить числовое поле u:

$$u(M)=\int_{\gamma_M}(\mathbf{A},\mathbf{l})\,dl\,,$$

где γ_M — путь, соединяющий некоторую фиксированную точку M_0 с точкой M. Числовое поле u — потенциал векторного поля $\mathbf{A}$.

Если область G определения безвихревого поля $\mathbf{A}$ односвязна, в том смысле, что на любой замкнутый контур Γ можно натянуть поверхность S, то в силу формулы Стокса

$$\oint_{\Gamma}(\mathbf{A},\mathbf{l})\,dl=\iint_S(\operatorname{rot}\mathbf{A},\mathbf{n})\,d\sigma=0\,,$$

поле $\mathbf{A}$ является потенциальным.

§ 11 Соленоидальное поле

1^0 Определение

Поле $\mathbf{B}$ называется соленоидальным, если $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$.

Типичный пример — поле ротора,

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}\,.$$

$\mathbf{A}$ называется векторным потенциалом поля $\mathbf{B}$.

Пример

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\mathbf{r}\,.$$

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}=\nabla\times(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\mathbf{r}=\nabla\times\left(\boldsymbol{\omega},\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}\right)\mathbf{r}+\nabla\times(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}=\nabla\left(\boldsymbol{\omega},\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}\right)\times\mathbf{r}+(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\nabla\times\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}=$$

$$=\operatorname{grad}\left(\boldsymbol{\omega},\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}\right)\times\mathbf{r}+(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\operatorname{rot}\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},$$

$\mathbf{B}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ — поле скоростей вращения твердого тела вокруг $\boldsymbol{\omega}$ с угловой скоростью $|\boldsymbol{\omega}|$.

Для этого поля

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\boldsymbol{\omega}(\nabla,\mathbf{r})-(\nabla,\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}=3\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}=2\boldsymbol{\omega}\,.$$

$\operatorname{rot}\mathbf{B}$ характеризует вращательное действие поля.

2^0 Пусть $\mathbf{B}$ — векторное поле. Рассмотрим линии, касающиеся векторов поля. Они называются векторными линиями векторного поля $\mathbf{B}$. Векторные линии отвечают системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = b_x(x, y, z), \\ \dot{y} = b_y(x, y, z), \\ \dot{z} = b_z(x, y, z). \end{cases}$$

Рассмотрим поверхность S, для которой вектор $\mathbf{B}$ не является касательным ни в одной точке. Совокупность векторных линий, проходящих через точки поверхности S, образует векторную трубку векторного поля $\mathbf{B}$. Если $\mathbf{B}$ — соленоидальное поле, то по формуле Остроградского поток векторного поля $\mathbf{B}$ через поверхность отрезка векторной трубки равен нулю. Поскольку поле имеет нулевой поток через боковую поверхность трубки (на боковой поверхности $(\mathbf{B}, \mathbf{n}) = 0$), мы получаем закон сохранения интенсивности векторной трубки

$$\iint_{S_1} (\mathbf{B}, \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_{S_2} (\mathbf{B}, \mathbf{n})\, d\sigma .$$