Глава II. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

§1. Основные понятия и определения

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F\left(x,\ y,\ y'\right)=0, \tag{1}$$

где F — функция в области $D\subset\mathbb{R}^3$. Будем предполагать функцию F достаточное число раз непрерывно дифференцируемой. Уравнение (1) определяет поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $E\subset\mathbb{R}^2$ проекцию этой поверхности на плоскость Oxy:

$$E=\left\{\left(x,\ y\right):\exists y'\ F\left(x,\ y,\ y'\right)=0\right\}.$$

В каждой точке множества E уравнение (1) определяет одно или несколько направлений.

Определение. Непрерывно дифференцируемая функция $y=\varphi\left(x\right),\ x\in\left(a,\ b\right)$ называется решением дифференциального уравнения (1), если она удовлетворяет этому уравнению, т.е.

$$\forall x\in\left(a,\ b\right)\ F\left(x,\ \varphi\left(x\right),\ \varphi'\left(x\right)\right)=0.$$

График решения называется интегральной кривой. Интегральная кривая во всех точках имеет одно из направлений, назначенных уравнением (1).

Пусть $\left(x_0,\ y_0\right)\in E$. Предположим, что имеется m чисел $y_1',\ y_2',\ldots,\ y_m'$, т.ч.

$$F\left(x_0,\ y_0,\ y_k'\right)=0,\ k=1,\ldots m.$$

Если во всех точках $\left(x_0,\ y_0,\ y_k'\right),\ k=1,\ldots m$ частная производная функции F по третьей переменной $\dfrac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$, то по теореме о неявной функции в некоторой окрестности каждой из этих точек уравнение (1) равносильно (с алгебраической точки зрения) уравнению

$$y'=f_k\left(x,\ y\right),\ k=1,\ldots,\ m. \tag{2}$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши каждое из уравнений (2) имеет единственное решение с начальным условием

$$y\big|_{x_0}=y_0. \tag{3}$$

В описанной ситуации точку $\left(x_0,\ y_0\right)$ называют обыкновенной точкой дифференциального уравнения (1).

Мы нашли m решений, m интегральных кривых, проходящих через точку $\left(x_0,\ y_0\right)$.

Интегральные кривые имеют разные направления.

Для однозначного определения решения условия Коши следует дополнить. Задача Коши для дифференциального уравнения (1) состоит в отыскании решения, удовлетворяющего условиям

$$y\big|_{x_0}=y_0,\ y'\big|_{x_0}=y_0'. \tag{4}$$

Здесь y_0' — одно из чисел, для которых $F\left(x_0,\ y_0,\ y_0'\right)=0$. Второе условие играет уточняющую роль.

В случае обращения в нуль $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ мы скажем, что $\left(x_0,\ y_0\right)$ — особая точка. Особые точки можно найти из системы

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ y') = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,\ y,\ y') = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Через особую точку может проходить более одной интегральной линии с общим направлением. Это точки неединственности.

Интегральная линия, целиком состоящая из точек неединственности, называется особой. Особым называется и соответствующее решение дифференциального уравнения.

Особое решение удовлетворяет системе (5).

Пример. $y^2 + y'^2 = 1$.

Система (5) имеет вид

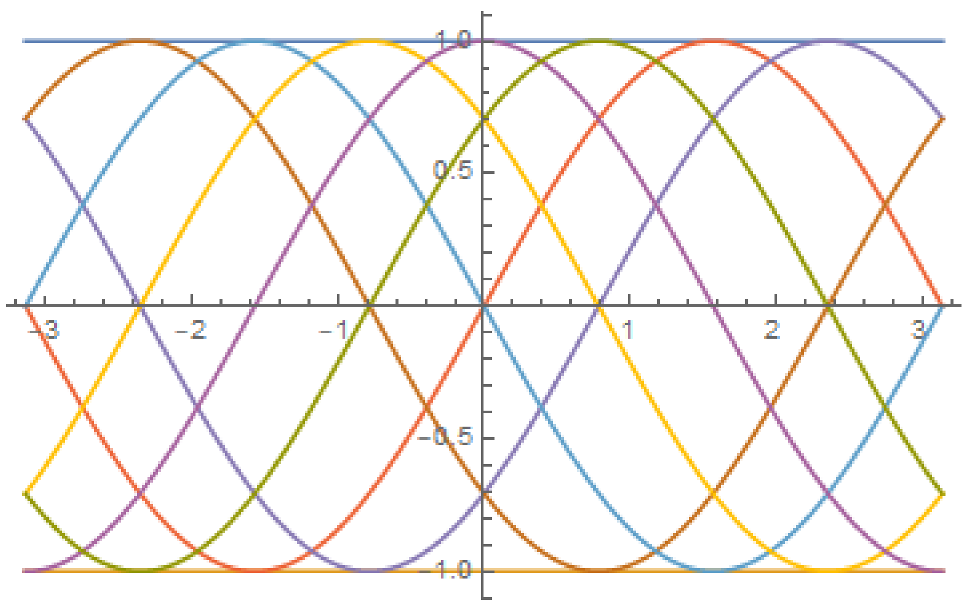
$$\begin{cases} y^2 + y'^2 = 1, \\ y' = 0. \end{cases}$$

Следствием этой системы являются равенства $y^2 = 1,\ y = \pm 1$. Функции $y = \pm 1$ — решения дифференциального уравнения. Другие решения даются формулой $y = \sin(x + C)$

$$(\ y' = \pm\sqrt{1 - y^2},\ \frac{y'}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm 1,\ \arcsin y = \pm x + C,\ y = \sin(x + C)).$$

Решения $y = \pm 1$ оказываются особыми.

Через каждую точку полосы $-1 < y < 1$ проходят две интегральные кривые с разными направлениями.



§ 2. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной

1^0. Разрешение уравнения относительно производной (см. § 1).

2^0. Введение параметра.

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$y = g(x,\ y') \tag{1}$$

или

$$x = h(y,\ y'). \tag{2}$$

Положим

$$p = y', \tag{3}$$

тогда

$$dy = pdx. \tag{4}$$

Для уравнения (1) имеем:

$$y = g(x,\ p),$$

$$dy = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp,$$

$$pdx = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp \text{ —} \tag{5}$$

уравнение в симметричной форме для переменных $x,\ p$.

Аналогично и для уравнения (2)

$$x = h(y,\ y'),$$

$$dx = \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial p}dp,$$

$$dy = p\left(\frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial p}dp\right). \tag{6}$$

3^0. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Дифференциальное уравнение

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{7}$$

где $\varphi(y')$ отлично от тождественного y', называется уравнением Лагранжа.

Вводя параметр $p = y'$, получим

$$y = x\varphi(p) + \psi(p),$$

$$dy = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp,$$

$$pdx = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp,$$

$$(\varphi(p) - p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp = 0 \text{ —} \tag{8}$$

линейное дифференциальное уравнение первого порядка для неизвестной функции x.

Если $x = \gamma(p)$ — решение уравнения (8), то решение уравнения (7) получается в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \gamma(p), \\ y = \gamma(p)\varphi(p) + \psi(p). \end{cases}$$

Если $\varphi(p_0) = p_0$, то функция

$$y = p_0 x + \psi(p_0)$$

является решением дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение

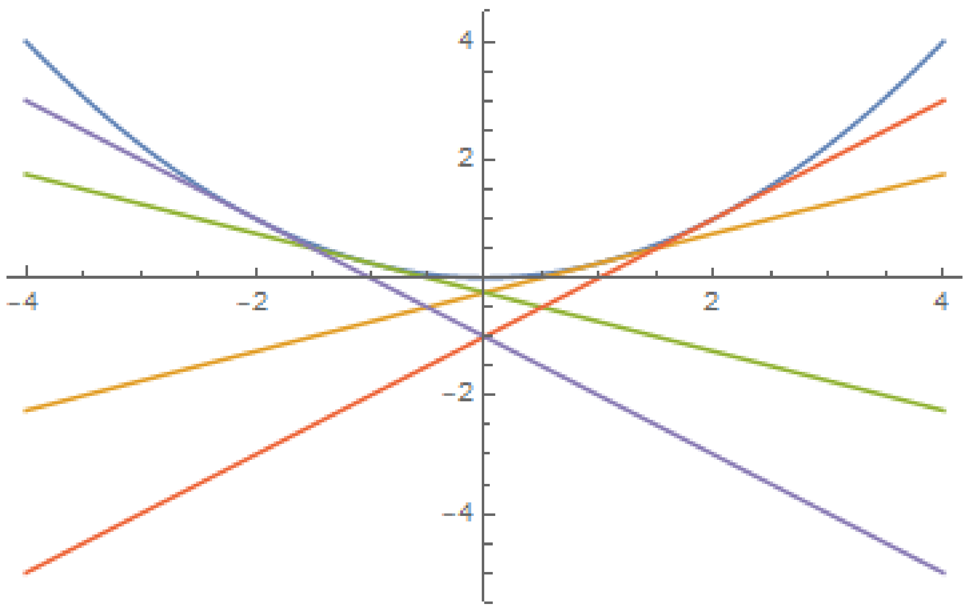
$$y = xy' + \psi(y') \tag{9}$$

называется уравнением Клеро.

Здесь введение параметра $p = y'$ дает

$$pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp,$$
$$(x + \psi'(p))dp = 0.$$
Отсюда
$dp = 0,\ p = C,\ y = Cx + \psi(C)$ — семейство линейных решений
или
$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p). \end{cases}$$
(Гарантировать, что последняя система определяет решение можно если ψ дважды непрерывно дифференцируема и ψ'' не обращается в нуль).
Пример.
$$y = xy' - y'^2$$
$$y' = p,\ y = xp - p^2,\ pdx = pdx + xdp - 2pdp,\ (x - 2p)dp = 0.$$
1) $dp = 0,\ p = C,\ y = Cx - C^2$, 2) $x = 2p,\ p = \dfrac{x}{2},\ y = \dfrac{x^2}{4}$.

Интегральными кривыми оказываются парабола $y = \dfrac{x^2}{4}$ и всевозможные ее касательные.



§ 3. Огибающая семейства кривых
Пусть
$$\Phi(x,\ y,\ C) = 0 \text{ —} \tag{1}$$
уравнение однопараметрического семейства кривых (Φ непрерывно дифференцируема, $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2$ не обращается в нуль).

Определение.
Гладкая кривая

$$\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(C), \\ y=\psi(C) \end{cases}$$

называется огибающей семейства кривых (1), если в каждой своей точке $\left(\varphi(C),\, \psi(C)\right)$ она касается кривой семейства (1), соответствующей значению параметра C, и отлична от этой кривой в любой окрестности этой точки.

Предложение. Если Γ — огибающая семейства (1), то функции $\varphi,\, \psi$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x,\, y,\, C)=0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial C}(x,\, y,\, C)=0. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Фиксируем значение параметра C_0. Кривая $\Phi(x,\, y,\, C_0)=0$ имеет в точке $\left(\varphi(C_0),\, \psi(C_0)\right)$ касательную с нормалью $\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x},\, \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$, линия Γ имеет касательный вектор $\left(\varphi'(C_0),\, \psi'(C_0)\right)$. Касание линий означает, что $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\varphi'+\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\psi'=0$.

При всех значениях параметра C имеет место равенство

$$\Phi\left(\varphi(C),\, \psi(C),\, C\right)=0.$$

Дифференцирование этого равенства дает

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\varphi'+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\psi'+\frac{\partial\Phi}{\partial C}=0,$$

так что

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C}\left(\varphi(C_0),\, \psi(C_0),\, C_0\right)=0,$$

что и требовалось доказать.

Если (1) — семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то огибающая — особая интегральная кривая.

Примеры.

1) $y'=3y^{2/3}$, $y'^3=27y^2$, $y=(x+C)^3$. Система (2) имеет вид

$$\begin{cases} y=(x+C)^3, \\ 3(x+C)^2=0. \end{cases}$$

Исключение параметра дает уравнение огибающей

$$y=0.$$

2) $y=Cx-C^2$ — семейство интегральных линий уравнения Клеро $y=xy'-y'^2$. Огибающую $y=\dfrac{x^2}{4}$ находим из системы

$$\begin{cases} y=Cx-C^2, \\ x-2C=0. \end{cases}$$

3) Найти кривую, на касательных которой координатные оси высекают отрезки постоянной длины.

Пусть касательная пересекает координатные оси в точках с координатами u, v, отрезок касательной имеет длину $u^2+v^2=a^2$.

Если $(x,\ y)$ — точка касания, то $v=y-xy',\ u^2+v^2=v^2(1+1/y'^2)=(y-xy')^2(1+1/y'^2)$.

Получается равенство $(y-xy')^2\left(1+1/y'^2\right)=a^2,\ y-xy'=\pm\dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$. Мы пришли к уравнению Клеро. Для простоты возьмем здесь знак минус. Положим $y'=p$, тогда

$$y=px-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},\ pdx=pdx+xdp-\frac{adp}{\left(1+p^2\right)^{3/2}},\ \left(x-\frac{a}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}\right)dp=0.$$

Что дает нам семейство прямых $y+Cx=+\dfrac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$ $(C=-p)$ и линию, заданную параметрически

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}, \\ y=p\dfrac{a}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}-\dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}=-\dfrac{ap^3}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}. \end{cases}$$

Исключение параметра p дает $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. Мы узнаем астроиду.