

## Лекция 10 09.11.2023

### Глава IV. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

#### § 1. Основные понятия

1<sup>0</sup>. Линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка имеет вид

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x), \quad (1)$$

$p_1, p_2, \dots, p_n; f$  — непрерывные функции на интервале  $(a, b)$ .

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка (соответствующим уравнению (1)).

2<sup>0</sup>. Задача Коши для д.у. (1) с начальными условиями

$$y|_{x_0} = y_0, y'|_{x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x_0} = y_0^{(n-1)} \quad (\text{здесь } x_0 \in (a, b)) \quad (3)$$

состоит в построении решения  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in (a, b)$  д.у. (1), для которого

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y'_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

3<sup>0</sup>. **Теорема 1.** Задача Коши для д.у. (1) с начальными условиями (3) имеет единственное решение  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in (a, b)$ .

Важным моментом является возможность определения этого решения на всем интервале  $(a, b)$  непрерывности коэффициентов и правой части д.у. (1).

#### § 2. Линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \quad (1)$$

1<sup>0</sup>. **Линейный дифференциальный оператор.**

Посредством формулы

$$L\varphi = \varphi^{(n)} + p_1(x)\varphi^{(n-1)} + \dots + p_n(x)\varphi \quad (2)$$

определим отображение

$$L: C^{(n)}(a, b) \rightarrow C(a, b)$$

пространства  $n$  раз непрерывно дифференцируемых функций  $C^{(n)}(a, b)$  в пространство непрерывных функций  $C(a, b)$ .

#### Предложение

$L$  — линейное отображение:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \quad L(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1L(\varphi_1) + \alpha_2L(\varphi_2).$$

2<sup>0</sup>. Линейное однородное дифференциальное уравнение в терминах линейного дифференциального оператора принимает вид

$$Ly = 0. \quad (3)$$

**Теорема 1.** Множество решений линейного однородного дифференциального уравнения есть ядро оператора  $L$ . Множество решений линейного однородного дифференциального

уравнения — линейное пространство (относительно поточечных операций сложения и умножения на число над функциями), подпространство пространства  $C^{(n)}(a, b)$ .

### § 3. Линейная зависимость системы функций

1<sup>0</sup>. **Определение.** Набор функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ , определенных на интервале  $(a, b)$ , называется линейно зависимым, если существует ненулевой набор вещественных чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , т.ч.

$$\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_m \varphi_m = 0. \quad (1)$$

**Упражнение.** Если  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  линейно зависимы на  $(a, b)$ , то  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  линейно зависимы на  $(a_1, b_1) \subset (a, b)$ .

2<sup>0</sup>. **Определитель Вронского.** Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  —  $(m-1)$  раз непрерывно дифференцируемые функции. Функция

$$W : W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_m'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского, или вронскианом, системы функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ .

3<sup>0</sup>. **Теорема 1** Если система функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  линейно зависима, то она имеет нулевой вронскиан:  $W = 0$ .

**Доказательство.**

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  — набор чисел, т.ч.

$$\forall x \in (a, b) \quad \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) = 0.$$

Дифференцируя это равенство, получаем систему соотношений

$$\begin{cases} \alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m(x) = 0, \\ \alpha_1 \varphi_1'(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m'(x) = 0, \\ \dots \\ \alpha_1 \varphi_1^{(m-1)}(x) + \dots + \alpha_m \varphi_m^{(m-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

Алгебраическая система линейных уравнений с определителем  $W$  имеет ненулевое решение  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ . По теореме Крамера  $\forall x \in (a, b) \quad W(x) = 0$ .

**Замечание.** Условие  $W = 0$  не является достаточным для линейной зависимости. Например, Функции  $\varphi_1(x) = x^2$ ,  $\varphi_2(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$  имеют нулевой вронскиан, но образуют линейно независимую систему.

### § 4. Линейная зависимость системы решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Если в некоторой точке определитель Вронского системы  $n$  решений линейного однородного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка равен нулю, то эта система решений линейно зависима.

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — решения д.у. (1),  $\exists x_0 \in (a, b) W(x_0) = 0$ .

Тогда система функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно зависима.

**Доказательство**

Определитель  $W(x_0)$  равен нулю, поэтому его столбцы линейно зависимы, существует ненулевой набор чисел  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , т.ч.

$$\alpha_1 \varphi_1^{(k)}(x_0) + \dots + \alpha_n \varphi_n^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Положим  $\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n$ . Тогда  $\varphi$  — решение д.у. (1) и  $\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$ , т.е.  $\varphi$  — решение задачи Коши для д.у. (1) с нулевыми начальными данными. По теореме единственности  $\varphi = 0$ . Система  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  линейно зависима.

**Следствие Альтернатива Вронского**

Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — решения д.у. (1),  $W$  — определитель Вронского.

Тогда  $\forall x \in (a, b) W(x) = 0$  или  $\forall x \in (a, b) W(x) \neq 0$ .

Действительно, система  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  может быть линейно зависимой или линейно независимой.

В первом случае вронсиан оказывается нулевой функцией, а во втором не обращается в нуль ни в одной точке.

**Формула Лиувилля.** Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — система  $n$  решений ЛДУ  $n$ -го порядка (1),  $W$  — определитель Вронского,  $x_0 \in (a, b)$ .

Тогда

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt} \tag{2}$$

**Доказательство**

Производная определителя равна сумме  $n$  определителей, в каждом из которых дифференцированию подвергнута одна строка. При дифференцировании определителя Вронского мы получаем  $n-1$  определитель с двумя одинаковыми строками. Эти определители равны нулю. Таким образом,

$$W'(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

Прибавим теперь к последней строке предыдущие, умноженные на  $p_n(x), p_{n-1}(x), \dots, p_2(x)$  соответственно:

$$W'(x) = -p_1(x) \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = -p_1(x) W(x).$$

$W(x)$  — решение ЛОДУ 1-го порядка  $z' + p_1(x)z = 0$ , поэтому

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}.$$

## § 5. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (1)$$

**1<sup>0</sup>. Теорема 1.** Пространство решений ЛОДУ  $n$ -го порядка  $n$ -мерно.

**Доказательство.**

1) По теореме существования д.у. (1) имеет решения  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ , удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_i^{(j)}(x_0) = \begin{cases} 1, & j = i-1 \\ 0, & j \neq i-1 \end{cases} \quad (2)$$

Для этой системы решений

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

решения линейно независимы.

2) Любое решение  $\varphi$  д.у. (1) — линейная комбинация решений  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ :

$$\varphi = \varphi(x_0)\varphi_1 + \varphi'(x_0)\varphi_2 + \dots + \varphi^{(n-1)}(x_0)\varphi_n \quad (3)$$

Действительно, пусть  $\psi = \varphi(x_0)\varphi_1 + \varphi'(x_0)\varphi_2 + \dots + \varphi^{(n-1)}(x_0)\varphi_n$ .  $\psi$  — решение д.у. (1),

$$\psi(x_0) = \varphi(x_0), \psi'(x_0) = \varphi'(x_0), \dots, \psi^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0).$$

По теореме единственности  $\psi = \varphi$ .

Мы показали, что  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — базис пространства решений, пространство решений  $n$ -мерно.

**2<sup>0</sup>. Определение.** Базис пространства решений ЛОДУ называется фундаментальной системой решений (ФСР).

ФСР ЛОДУ  $n$ -го порядка — это линейно независимая система из  $n$  решений этого уравнения.

В п. 1<sup>0</sup> построена ФСР, нормированная в точке  $x_0$ .

**3<sup>0</sup>. Теорема 2. Общее решение ЛОДУ.**

Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — ФСР ЛОДУ (1).

Тогда формула

$$y = C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) \quad (4)$$

дает общее решение ЛОДУ (1):

1)  $\forall C_1, \dots, C_n$   $C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$  — решение ЛОДУ (1),

2) Для любого решения  $\varphi$  найдутся такие  $C_1, \dots, C_n$ , что  $\varphi = C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$ .

## § 6. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

$$Ly = 0 \quad (2)$$

**1<sup>0</sup>. Теорема 1.**

1) Если  $\varphi$  — решение уравнения (2),  $\psi_0$  — решение уравнения (1), то  $\psi = \psi_0 + \varphi$  — решение уравнения (1).

2) Если  $\psi_1, \psi_2$  — решения уравнения (1), то  $\varphi = \psi_2 - \psi_1$  — решение уравнения (1).

**Доказательство**

1) Пусть  $\varphi$  — решение уравнения (2), т.е.  $L\varphi = 0$ ;  $\psi_0$  — решение уравнения (1), т.е.  $L\psi_0 = f$ ;  $\psi = \psi_0 + \varphi$ . Тогда  $L\psi = L\psi_0 + L\varphi = f + 0 = f$ ,  $\psi$  — решение д.у. (1).

2) Пусть  $\psi_1, \psi_2$  — решения уравнения (1),  $\varphi = \psi_2 - \psi_1$ . Тогда  $L\varphi = L\psi_2 - L\psi_1 = f - f = 0$ ,  $\varphi$  — решение д.у.(2).

**Теорема 2. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения**

Пусть  $\psi_0$  — решение уравнения (1),  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  —ФСР для д.у. (2).

Тогда формула

$$y = \psi(x) + C_1\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) \quad (3)$$

даёт общее решение (1):

1)  $\forall C_1, \dots, C_n \psi = \psi_0 + C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$  — решение ЛДУ (1),

2) Для любого решения  $\psi$  ЛДУ (1) найдутся такие  $C_1, \dots, C_n$ , что  $\psi = \psi_0 + C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$ .

**Доказательство**

1)  $\varphi = C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$  — решение (2), по Теореме 1  $\psi = \psi_0 + \varphi$  — решение ЛДУ (1).

2) По Теореме 1  $\varphi = \psi - \psi_0$  — решение ЛОДУ (2), по теореме об общем решении ЛОДУ найдутся такие  $C_1, \dots, C_n$ , что  $\varphi = C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$ . Получается, что  $\psi = \psi_0 + C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$ .

**2<sup>0</sup>. Метод вариации произвольных постоянных**

**Теорема 3.** Пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  — ФСР ЛОДУ (2).

Тогда функция

$$\psi(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x) \quad (4)$$

решение ЛДУ (1), если функции  $C_1(x), \dots, C_n(x)$  получены из системы

$$\begin{cases} C_1'\varphi_1 + \dots + C_n'\varphi_n = 0 \\ C_1'\varphi_1' + \dots + C_n'\varphi_n' = 0 \\ \dots \\ C_1'\varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} = f \end{cases} \quad (5)$$

**Доказательство**

Определителем системы (5) является вронскиан  $W$  ФСР ЛОДУ (2),  $W$  не обращается в нуль ни в одной точке, система (5) имеет единственное решение. По найденным из системы (5) функциям  $C_1', \dots, C_n'$  простым интегрированием находим функции  $C_1, \dots, C_n$ . Положим

$$\psi(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x) \\ \psi'(x) &= C_1'(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n'(x)\varphi_n(x) + C_1(x)\varphi_1'(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n'(x) = \\ &= C_1(x)\varphi_1'(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n'(x) \\ &\dots\dots\dots \\ \psi^{(n)}(x) &= C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n)}(x) = \\ &= f(x) + C_1(x)\varphi_1^{(n)}(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n^{(n)}(x) \end{aligned}$$

$$L\psi = f + C_1L\varphi_1 + \dots + C_nL\varphi_n = f, \text{ ч.т.д.}$$

**Пример**

$$xy'' + y' = 6x^5, \quad x > 0; \quad y'' + \frac{1}{x}y' = 6x^4.$$

Функции  $\varphi_1(x) = 1$ ,  $\varphi_2(x) = \ln x$  образуют ФСР. Функции  $C_1, C_2$  находим из системы

$$\begin{cases} C_1' + C_2' \ln x = 0, & C_1' = -6x^5 \ln x, \quad C_1 = -x^6 \ln x + \frac{1}{6}x^6 \\ C_2' \frac{1}{x} = 6x^4, \quad C_2' = 6x^5, \quad C_2 = x^6 \end{cases}$$

$$y = -x^6 \ln x + \frac{1}{6}x^6 + x^6 \ln x = \frac{1}{6}x^6.$$

Общее решение записываем в виде

$$y = \frac{1}{6}x^6 + C_1 + C_2 \ln x$$

**3<sup>0</sup>. Принцип суперпозиции.**

Пусть  $\psi_j, j = 1, \dots, m$  — решения уравнение  $Ly = f_j$ ;  $\psi = \alpha_1\psi_1 + \dots + \alpha_m\psi_m$ ,

Тогда  $\psi$  — решение уравнения  $Ly = \alpha_1f_1 + \dots + \alpha_mf_m$ .