Лекция 10   04.10.2024

Глава III. Непрерывные функции

§ 1. Понятие непрерывной функции

1^0. Определение 1

Пусть f — функция, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

Функция f называется непрерывной в точке x_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \ \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f\left(x\right) - f\left(x_0\right) \right| < \varepsilon .$$

Непрерывность означает, что малым изменениям x отвечают малые изменения значения функции.

Чаще всего в качестве E рассматривается промежуток.

Определение 2

Функция f называется непрерывной в точке x_0, если для любой окрестности V точки $f\left(x_0\right)$ можно указать окрестность U точки x_0, для которой $f\left(U \cap E\right) \subset V$.

Определение 3

Функция f называется непрерывной в точке x_0, если

$$\forall \left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \ x_n \in E \ x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0 \Rightarrow f\left(x_n\right) \underset{n\to\infty}{\to} f\left(x_0\right).$$

Обычно x_0 — предельная точка множества E. Для такого случая приведем еще

Определение 4

Функция f называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right).$$

Теорема 1.

Определения 1–4 равносильны.

2^0. Одностороння непрерывность

Определение.

1) Пусть f — функция, определенная по крайней мере на промежутке $\left(x_0 - \delta_0,\ x_0\right]$.

Функция f называется непрерывной в точке x_0 слева, если

$$f(x_0) = f(x_0 - 0).$$

2) Функция f называется непрерывной в точке x_0 справа, если

$$f(x_0) = f(x_0 + 0).$$

Теорема 2.

Пусть f — функция, определенная в окрестности точки x_0.

Для непрерывности функции f в точке x_0 необходима и достаточна ее непрерывность в этой точке слева и справа.

3^0. Приращение функции

Определение.

Пусть f — функция, определенная в окрестности точки x_0.

Определим функцию $\Delta f(x_0)$, полагая

$$\Delta f(x_0)(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

для тех h, для которых $x_0 + h$ лежит в множестве определения функции.

Функция $\Delta f(x_0)$ называется приращением функции f в точке x_0. Приращение определяется в некоторой окрестности нуля.

Теорема 3.

Для непрерывности функции необходима и достаточна бесконечная малость ее приращения.

$$f \text{ непрерывна в точке } x_0 \Leftrightarrow \text{ приращение бесконечно мало, } \Delta f(x_0)(h) \underset{h \to 0}{\to} 0.$$

Замечания. 1) Наряду с обозначением $\Delta f(x_0)(h)$ будем в том же смысле использовать и запись $\Delta f(x_0, h)$.

2) Бывает удобным вместо h использовать символ Δx: $\Delta f(x_0)(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

3) Можно рассматривать приращение в форме $\Delta f(x_0)(x) = f(x) - f(x_0)$.

§ 2. Точки разрыва

Определение 1.

Пусть f — функция, определенная на множестве E, x_0 — предельная точка E.

x_0 называется точкой разрыва, если f не является непрерывной в этой точке.

x_0 оказывается точкой разрыва, если f не определена в этой точке, не имеет предела или $f\left(x_0\right) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right)$.

Определение 2. Классификация точек разрыва

Пусть функция f определена на множестве, содержащем некоторую проколотую окрестность точки x_0.

Пусть x_0 — точка разрыва функции f.

1) x_0 — называется точкой разрыва I рода, если функция имеет конечные односторонние пределы $f\left(x_0 - 0\right)$, $f\left(x_0 + 0\right)$.

Если при этом $f\left(x_0 - 0\right) = f\left(x_0 + 0\right)$, x_0 — называется точкой устранимого разрыва.

Если же $f\left(x_0 - 0\right) \neq f\left(x_0 + 0\right)$, x_0 — называется точкой скачка, число $\Delta = f\left(x_0 + 0\right) - f\left(x_0 - 0\right)$ называется величиной скачка.

2) Другие случаи относят к разрывам II рода.

Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен, x_0 называется точкой бесконечного разрыва.

Примеры

В точке устранимого разрыв функция имеет конечный предел $A = \lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right)$. Разрыв обусловлен тем, что функция не определена или плохо определена в точке x_0. Полагая

$$\tilde{f}\left(x\right) = \begin{cases} f\left(x\right), & x \neq x_0, \\ A, & x = x_0, \end{cases}$$

мы получим непрерывную функцию. Говорят, что $\tilde{f}$ получена из f устранением разрыва.

Функция $f:\ f\left(x\right) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$ имеет устранимый разрыв в нуле. Полагая $f\left(0\right) = 1$, мы получаем непрерывную функцию.

Функция $f: f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x = 0, \\ -1, \ x < 0 \end{cases}$ имеет в нуле скачок величины $\Delta = 2$.

Функция $f: f(x) = \dfrac{1}{x}, \ x \neq 0$ имеет в нуле бесконечный разрыв.

Функция $f: f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, \ x \neq 0$ имеет в нуле разрыв II рода, функция не имеет односторонних пределов.

§ 3. Локальные свойства непрерывных функций

Свойство непрерывности функции точке x_0 полностью определяется ее поведением в любой окрестности этой точки. Если функции f и g совпадают в некоторой окрестности точки x_0, то они одновременно непрерывны или нет. Имея в виду этот факт, непрерывность в точке называют локальным свойством.

1⁰. Теорема 1. Локальная ограниченность непрерывной функции

Пусть f непрерывна в точке x_0.

Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки, найдется такая окрестность U точки x_0, что $f(U)$ — ограниченное множество,

$$\exists M > 0 \ \forall x \in U \ \left| f(x) \right| \leq M .$$

Действительно, подберем $M > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $-M < f(x_0) < M$. Интервал $(-M, M)$ — окрестность точки $f(x_0)$; по определению непрерывности найдется окрестность U точки x_0, для которой $f(U) \subset (-M, M)$.

2⁰. Теорема 2. Арифметические операции над непрерывными функциями.

Пусть f, g определены в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывны в точке x_0.

Определим функции

$$\begin{aligned} &F = f + g : F(x) = f(x) + g(x), \\ &G = fg : G(x) = f(x)g(x), \\ &H = \frac{f}{g} : H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

В последнем случае предполагаем, что $g(x_0) \neq 0$.

Тогда функции F, G, H непрерывны в точке x_0.

Арифметические операции над непрерывными функциями приводят к непрерывным функциям.

Теорема следует из соответствующей теоремы о пределах.

3^0. Теорема 3. Стабилизация неравенств.

Пусть f, g непрерывны в точке x_0 и $f(x_0) < g(x_0)$.

Тогда неравенство справедливо в некоторой окрестности точки x_0,

$$\exists U \text{ — окрестность точки } x_0 \ \forall x \in U \ f(x) < g(x).$$

Следствие

Пусть f непрерывна в точке x_0.

Тогда

1) Если $f(x_0) > A$, то $f(x) > A$ в некоторой окрестности точки x_0;

2) Если $f(x_0) > 0$, то $f(x) > 0$ в некоторой окрестности точки x_0.

4^0. Теорема 4. Непрерывность композиции.

Пусть f определена в окрестности U точки x_0 и непрерывна в этой точке; g определена в окрестности V точки $y_0 = f(x_0)$ и непрерывна в этой точке. Можно считать, что $f(U) \subset V$, так что имеет смысл композиция

$$F = g \circ f : F(x) = g(f(x)),\ x \in U.$$

Тогда функция F непрерывна в точке x_0.

Замечание.

В случае нарушения условия $f(U) \subset V$ следует уменьшить окрестность U, заменив ее окрестностью U_1, для которой $f(U_1) \subset V$. Существование такой окрестности обеспечивается непрерывностью функции f.

Доказательство.

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in U, x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$. Тогда по определению непрерывности

$$y_n = f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0) = y_0,$$

а

$$g(y_n) \underset{n\to\infty}{\to} g(y_0).$$

Но

$$g(y_n) = g\left(f(x_n)\right) = F(x_n),\ g(y_0) = g\left(f(x_0)\right) = F(x_0),$$

так что

$$F(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} F(x_0).$$

F непрерывна в точке x_0.

Предел композиции

Пусть $F = f \circ \varphi,\ f(x) \underset{x\to x_0}{\to} A,\ \varphi(t) \underset{t\to t_0}{\to} x_0$.

Без дополнительных условий утверждение $F(t) \underset{t\to t_0}{\to} A$ оказывается ложным.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad \varphi(t) = 0.$$

Тогда

$$F(t) = 1,\quad A = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{t\to 0} F(t)$$

Однако, если выполнено одно из дополнительных условий:

1) в некоторой проколотой окрестности точки t_0 выполнено неравенство $\varphi(t) \neq x_0$,

2) f непрерывна в точке x_0,

то

$$F(t) \underset{t\to t_0}{\to} A.$$

Если φ — биекция окрестности U точки t_0 на окрестность V точки x_0, $\varphi(t_0) = x_0$, φ непрерывна в точке t_0, φ^{-1} непрерывна в точке x_0, то соотношения $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} A$ и $F(t) \underset{t\to t_0}{\to} A$ равносильны.

Именно на последнее замечание ссылаются при выполнении замены переменной.

Мы хотим вычислить предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Полагаем $x=\varphi(t)$, приходим к выражению

$$\lim_{t\to t_0} f(\varphi(t))=\lim_{t\to t_0} F(t).$$

Вычислив этот предел, мы находим и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Если функция F не имеет предела, то и f не имеет предела.

Пример. Скоро мы установим, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Положим $x=\varphi(t)=e^t-1\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$.

Можем утверждать, что $\lim\limits_{x\to 0} f(\varphi(t))=1$. Но $f(\varphi(t))=\frac{\ln(1+e^t-1)}{e^t-1}=\frac{t}{e^t-1}$. Следовательно,

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1.$$