Лекция 10 (продолжение) 07.03.2025

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава I Предел и непрерывность функций нескольких переменных

§ 1 Пространство $\mathbb{R}^n$

1^0. Множество $\mathbb{R}^n$

Множество $\mathbb{R}^n$ представляет собой совокупность всевозможных упорядоченных n-элементных наборов $x=\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ вещественных чисел. Элементы $\mathbb{R}^n$ называют точками, или векторами. x^k — k-я компонента, или координата вектора x.

2^0. Линейная структура в $\mathbb{R}^n$

В $\mathbb{R}^n$ вводятся операции сложения и умножения на число. Сумма элементов $x_1=\left(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n\right)$ и $x_2=\left(x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n\right)$ определяется формулой

$$x_1+x_2=\left(x_1^1+x_2^1, x_1^2+x_2^2, \ldots, x_1^n+x_2^n\right),$$

а произведение числа λ и элемента $x=\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ — формулой

$$\lambda x=\left(\lambda x^1, \lambda x^2, \ldots, \lambda x^n\right).$$

Тем самым $\mathbb{R}^n$ наделяется структурой линейного пространства.

Основные свойства линейных пространств хорошо известны из курса алгебры.

Векторы

$$e_1=(1,0,\ldots 0),\ e_2=(0,1,\ldots 0), \ldots, e_n=(0,0,\ldots 1)$$

образуют канонический базис в $\mathbb{R}^n$. Каждый элемент $x=\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ может быть единственным образом разложен по базису, т.е. записан в виде

$$x=x^1 e_1+\cdots+x^n e_n.$$

Прямые, лучи, отрезки. Множество точек вида $a+tl,\ t\in(-\infty, +\infty)$ называется прямой, $a+tl,\ t\in[0, +\infty)$ — лучом, $(1-t)a+tb,\ t\in[0, 1]$ — отрезком с концами a,b.

3^0. Скалярное произведение

Для $x_1 = \left(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n\right)$ и $x_2 = \left(x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^n\right)$ число

$$\left(x_1,\ x_2\right) = x_1^1 x_2^1 + x_1^2 x_2^2 + \cdots + x_1^n x_2^n$$

называется скалярным произведением векторов $x_1,\ x_2$.

$$\begin{aligned}
&1)\ (x,\ x) \ge 0,\quad (x,\ x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;\\
&2)\ (x, y) = (y, x);\\
&3)\ (\lambda x + \mu y, z) = \lambda (x, z) + \mu (y, z).
\end{aligned}$$

Векторы, имеющие нулевое скалярное произведение, называются ортогональными.

4^0. Норма

Для $x = \left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right)$ число

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\left(x^1\right)^2 + \cdots \left(x^n\right)^2}$$

называется нормой.

Отметим основные свойства нормы.

$$\begin{aligned}
&1)\ \|x\| \ge 0,\ \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,\\
&2)\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,\\
&3)\ \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

Доказательства требует лишь последнее свойство, называемое неравенством треугольника.

Применив известное неравенство Коши-Буняковского

$$\left|(x,\ y)\right| \le \|x\| \cdot \|y\|,$$

(которое является частным случаем неравенства Гельдера), получим

$$\|x + y\|^2 = (x + y,\ x + y) = \|x\|^2 + 2(x,\ y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2,$$

что и доказывает неравенство треугольника.

Базис, состоящий из взаимно ортогональных векторов единичной нормы, называется ортонормированным.

5^0. Расстояние

Норма позволяет ввести в $\mathbb{R}^n$ расстояние. Мы сделаем это с помощью формулы

$$\rho(x,\ y) = \|x - y\|.$$

Для $n = 2,3$ формула дает обычное геометрическое расстояние.

Важнейшие свойства расстояния даются формулами

$$1)\ \rho(x,\ y)\geq 0,\ \rho(x,\ y)=0 \Leftrightarrow x=y,$$
$$2)\ \rho(x,\ y)=\rho(y,\ x),$$
$$3)\ \rho(x,\ y)\leq \rho(x,\ z)+\rho(z,\ y).$$

Теперь $\mathbb{R}^n$ — метрическое пространство. Можно приступать к построению теории сходимости.

6⁰. Последовательности в $\mathbb{R}^n$

Определение. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов пространства $\mathbb{R}^n$, $a\in\mathbb{R}^n$. Мы назовем a пределом последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и напишем

$$x_k \underset{k\to\infty}{\to} a,\ a=\lim_{k\to\infty} x_k,$$

если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall k>N\ \|x_k-a\|<\varepsilon.$$

Полезно заметить, что $x_k \underset{k\to\infty}{\to} a$ в том и только в том случае, если $\|x_k-a\|\underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Предложение 1. Если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится, то она ограничена, т.е.

$$\exists M>0\ \|x_k\|\leq M\ (k=1,2,\ldots).$$

Предложение 2. Предел единствен.

Предложение 3. О пределе подпоследовательности.

Если $x_k \underset{k\to\infty}{\to} a,\ k_1<k_2<\cdots$, то $x_{k_i} \underset{i\to\infty}{\to} a$.

Лекция 11 11.03.2025

Предложение 4. Теорема о смысле сходимости в $\mathbb{R}^n$

$$x_k \underset{k\to\infty}{\to} a \Leftrightarrow x_k^i \underset{k\to\infty}{\to} a^i,\ (i=1,\ 2,\ldots,n).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_k \underset{k\to\infty}{\to} a$, т.е. $\|x_k-a\|\underset{k\to\infty}{\to} 0$, тогда поскольку

$$\left|x_k^i-a^i\right|\leq\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|x_k^j-a^j\right|^2}=\|x_k-a\|,$$

то и $x_k^i \underset{k\to\infty}{\to} a^i,\ (i=1,\ 2,\ldots,n)$.

Достаточность. Пусть $x_k^i \underset{k\to\infty}{\to} a^i,\ (i=1,\ 2,\ldots,n)$, тогда на основе известных свойств сходящихся числовых последовательностей получаем соотношение

$$\|x_k - a\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left|x_k{}^j - a^j\right|^2} \underset{k\to\infty}{\to} 0 .$$

Предложение 5. Линейные операции и скалярное произведение непрерывны.

1) Если $x_k \underset{k\to\infty}{\to} a$ $y_k \underset{k\to\infty}{\to} b$, то $x_k + y_k \underset{k\to\infty}{\to} a+b$.

2) Если $x_k \underset{k\to\infty}{\to} a$, $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\to} \mu$, то $\lambda_k x_k \underset{k\to\infty}{\to} \mu a$.

3) Если $x_k \underset{k\to\infty}{\to} a$ $y_k \underset{k\to\infty}{\to} b$, то $(x_k,\, y_k) \underset{k\to\infty}{\to} (a,\, b)$.

Предложение 6. Критерий Коши

Для того чтобы последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной, т.е. удовлетворяла условию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall k, m > N\ \|x_k - x_m\| < \varepsilon .$$

Можно условие Коши представить формулой

$$\|x_k - x_m\| < \varepsilon \xrightarrow[r,m\to\infty]{} 0 .$$

Предложение 7. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса.

Из ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая $n=2$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k = (u_k,\, v_k)$ — ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\{u_k\}$, $\{v_k\}$ — ограниченные числовые последовательности. Из $\{u_k\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{u_{k_i}\}$. Последовательность $\{v_{k_i}\}$ ограничена. из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\left\{v_{k_{i_j}}\right\}$. Последовательность $\left\{u_{k_{i_j}}\right\}$, будучи подпоследовательностью сходящейся последовательности, обязана сходиться. По предложению 4 последовательность $\left\{x_{k_{i_j}}\right\}$ сходится. Искомая подпоследовательность построена.

7^0. Открытые и замкнутые множества

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R}^n,\ R > 0$.

1) Множество

$$K_R(a) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < R\right\}$$

называется шаром радиуса R с центром a.

2) Множество

$$\bar{K}_R(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \le R\}$$

называется замкнутым шаром.

Иногда шар называют открытым шаром.

3) Множество

$$S_R(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| = R\}$$

называется сферой.

Определение. Множество $V_\varepsilon(a) = K_\varepsilon(a)$ называется ε-окрестностью точки a.

Множество V называется окрестностью точки a, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что $V_\varepsilon(a) \subset V$.

Определение предела последовательности можно сформулировать на языке окрестностей.

Для того чтобы $x_k \underset{k\to\infty}{\to} a$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall V \ \exists N \ \forall k > N \ x_k \in V.$$

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.

1) a — внутренняя точка множества E, если

$$\exists \varepsilon > 0 \ V_\varepsilon(a) \subset E,$$

т.е. E — окрестность точки a.

2) a — внешняя точка множества E, если a — внутренняя точка для $CE = \mathbb{R}^n \setminus E$, т.е.

$$\exists \varepsilon > 0 \ V_\varepsilon(a) \cap E = \varnothing.$$

3) a — граничная точка множества E, если a не является ни внутренней, ни внешней, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ V_\varepsilon(a) \cap E \ne \varnothing \quad V_\varepsilon(a) \cap CE \ne \varnothing.$$

Пример. $K_R(a)$, $\bar{K}_R(a)$.

Если $\|x-a\| < R$, то x — внутренняя точка;

если $\|x-a\| > R$, то x — внешняя точка;

если $\|x-a\|=R$, то x — граничная точка.

Действительно, если $\|x-a\|<R$, то для $\varepsilon=R-\|x-a\|$ имеем включение $V_\varepsilon(x)\subset K_R(a)$, поскольку для $y\in V_\varepsilon(x)$ имеет место неравенство

$$\|y-a\|\le\|y-x\|+\|x-a\|<\varepsilon+\|x-a\|=R.$$

x — внутренняя точка шара.

Определение. 1) Множество $G\subset\mathbb{R}^n$ называется открытым, если все точки множества G являются его внутренними точками.

2) Множество $F\subset\mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

Примеры. $K_R(a)$ — открытое множество, $\bar{K}_R(a)$ — замкнутое множество. $\mathbb{R}^n$, $\varnothing$ — открыто-замкнутые множества.

Упражнение. 1)

$$G \text{ открыто} \Leftrightarrow F=\mathbb{R}^n\setminus G \text{ замкнуто}.$$

2) Объединение любой совокупности открытых множеств — открытое множество.

3) Пересечение конечной совокупности открытых множеств — открытое множество.

Если E — некоторое подмножество $\mathbb{R}^n$, то совокупность $\operatorname{int}E=E^\circ$ всех его внутренних точек называется внутренностью множества E. $\operatorname{int}E$ — наибольшее открытое подмножество множества E.

Множество $\bar{E}$, полученное из E присоединением всех его граничных точек, называется замыканием множества E. Замыкание множества E — наименьшее замкнутое множество, содержащее множество E.

Предложение. Для того чтобы множество было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало пределы всех сходящихся последовательностей своих элементов.

Доказательство. Необходимость. Пусть F замкнуто, $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность его элементов, $x_k\underset{k\to\infty}{\to}a$. Последнее означает, что a не является внешней точкой множества F, т.е. является внутренней точкой и автоматически является элементом множества F или является граничной точкой и принадлежит множеству F, поскольку это множество замкнуто.

Достаточность. Пусть a — граничная точка множества F. Для любого $k\in\mathbb{N}$ окрестность $V_{1/k}(a)$ имеет непустое пересечение с множеством F. Выберем некоторую точку $x_k \in V_{1/k}(a) \cap F$. Поскольку $\|x_k - a\| < \dfrac{1}{k}$, то $x_k \underset{k\to\infty}{\to} a$ и по условию $a \in F$, что и требовалось доказать.

Определение. a — предельная точка множества F, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in F \quad 0 < \|x - a\| < \varepsilon .$$

Упражнение. Если a — граничная точка множества F, то a — предельная точка множества F или его изолированная точка, т.е. $\exists \varepsilon > 0\ V_\varepsilon(a) \cap F = \{a\}$.

8⁰. Области

Пусть $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ — непрерывные функции на отрезке $[\alpha,\ \beta]$. Отображение $\gamma : [\alpha,\ \beta] \to \mathbb{R}^n$, действующее по формуле $\gamma(t) = \left(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)\right),\ t \in [\alpha,\ \beta]$, называется путем в $\mathbb{R}^n$.

Множество G называется линейно связным, если любые две его точки можно соединить путем, проходящим в G.

Множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок. Выпуклое множество линейно связно.

Непустое открытое линейно связное множество называется областью.

9⁰. Ограниченные множества

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если

$$\exists M > 0\ \forall x \in E\ \|x\| \le M ,$$

т.е. если норма является ограниченной функцией на этом множестве.

10⁰. Компакты

Определение. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется компактом, если из любой последовательности его элементов можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к элементу множества K.

Теорема 1. Для того чтобы множество K было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.

Доказательство. Необходимость. Пусть K — компакт. Если a — граничная точка, то найдется последовательность $\{x_k\}$ элементов множества K, для которой $x_k \underset{k\to\infty}{\to} a$.

Последовательность $\{x_k\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $x_{k_i} \to b \in K$. По теореме о пределе подпоследовательности $a = b$. Таким образом, $a \in K$, K — замкнутое множество.

Допустим, что K — неограниченное множество. Тогда

$$\forall k \ \exists x_k \in K \ \|x_k\| > k .$$

Последовательность $\{x_k\}$ — бесконечно большая последовательность, любая подпоследовательность тоже окажется бесконечно большой и не может быть сходящейся. Мы получили противоречие с условием компактности.

Достаточность. Пусть K ограничено и замкнуто, $\{x_k\}$ — последовательность элементов множества K. По принципу выбора Больцано-Вейерштрасса $\{x_k\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_i}\}$. Поскольку K замкнуто, то $a = \lim\limits_{i\to\infty} x_{k_i} \in K$.

Определение. 1) Последовательность $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ называется покрытием множества K, если объединение множеств этой совокупности содержит множество K:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \supset K .$$

2) Покрытие, состоящее из открытых множеств называется открытым покрытием.

Определение. 1) Последовательность $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ называется центрированной в K, если

$$\forall k \quad F_1 \cap \dots \cap F_k \cap K \neq \varnothing .$$

Теорема 2. Лемма Гейне-Бореля

Равносильны условия:

1) K — компакт;

2) Любое открытое покрытие $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества K имеет конечное подпокрытие:

$$\exists k \quad K \subset G_1 \cup \dots \cup G_k .$$

3) Для любой центрированной в K системы замкнутых множеств $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ пересечение всей совокупности пересекается с K,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \cap K \neq \varnothing$$

Доказательство.

1)$\Rightarrow$2) Пусть $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — открытое покрытие. Допустим,

$$\forall k \ \exists x_k \notin G_1 \cup \dots \cup G_k ,$$

тогда

$$\forall k \ge l \quad x_k \notin G_l .$$

Из последовательности $\{x_k\}$ извлечем подпоследовательность $\{x_{k_i}\}$, сходящуюся к элементу $x_0 \in K$.

Для этой подпоследовательности имеем

$$x_{k_i} \notin G_l ,\ x_{k_i} \in \mathbb{R}^n \setminus G_l \text{ при } i \ge l .$$

Мы имеем последовательность $\{x_{k_i}\}_{i=l}^{\infty}$ элементов замкнутого множества $\mathbb{R}^n \setminus G_l$. Предел x_0 неизбежно попадает в это множество. Мы приходим к выводу, что

$$x_0 = \lim_{i\to\infty} x_{k_i} \notin G_l ,\ l = 1, 2, \dots ,$$

хотя $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — покрытие множества K.

2) $\Rightarrow$ **3)** Пусть $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ — центрированная в K система замкнутых множеств. Допустим $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \cap K = \varnothing$. Тогда множества $G_k = \mathbb{R}^n \setminus F_k$ образуют открытое покрытие множества K: $\forall x \in K \ \exists k \quad x \notin F_k \quad x \in G_k$. По условию 2) найдется конечное подпокрытие $G_1, \dots, G_k$.

Получается, что $F_1 \cap \dots \cap F_k \cap K = \varnothing$ в противоречие с центрированностью. Мы должны признать, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \cap K \ne \varnothing$.

3) $\Rightarrow$ **1)** Пусть $\{x_k\}$ последовательность элементов множества K. Положим $E_k = \{x_k,\ x_{k+1}, \dots\}$, $F_k = \bar{E}_k$. Замкнутые множества F_k образуют центрированную систему, поэтому $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k \cap K \ne \varnothing$, $\exists x_0 \in F_k \cap K,\ k = 1, 2, \dots$.

Выделим из $\{x_k\}$ подпоследовательность, сходящуюся к x_0.

Построим строго возрастающую последовательность $\{k_i\}$ натуральных чисел:

$$k_1 = 1,$$

$$x_0 \in F_2 = \bar{E}_2,\ \exists k_2 > k_1 \ \left\| x_{k_2} - x_0 \right\| < \frac{1}{2}$$

$$x_0 \in F_{k_i+1} = \bar{E}_{k_i+1},\ \exists k_{i+1} > k_i ,\ \left\| x_{k_{i+1}} - x_0 \right\| < \frac{1}{i+1}.$$

Построена подпоследовательность $x_{k_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x_0$.