Лекция 1 08.09.2023 (3 часа)

§ 4. Важнейшие теоремы о равномерно сходящихся рядах

1^0. Непрерывность

Теорема 1.

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность на промежутке Δ; $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на Δ.

Пусть далее x_0 — некоторая точка Δ и функции f_n непрерывны в точке x_0.

Тогда f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Подберем такое n_0, что

$$\left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при всех } x \in \Delta.$$

Получается, что при любом $x \in \Delta$

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| \le \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| + \left|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right| < \frac{2\varepsilon}{3} + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right|$$

Поскольку f_{n_0} непрерывна в точке x_0, то найдется такое $\delta > 0$, что

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и, следовательно, $\left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$.

Теорема доказана.

Теорема 1'.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ — функциональный ряд на промежутке Δ; $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на Δ.

Пусть далее x_0 — некоторая точка Δ и функции f_n непрерывны в точке x_0.

Тогда S непрерывна в точке x_0.

Теорема 2. Теорема Дини.

Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность на отрезке $[a, b]$;

1) $f_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f$ на $[a, b]$ поточечно;

2) $\forall x \in [a, b]$ последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонна;

3) функции f, f_1, $f_2, \ldots$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Тогда $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $[a, b]$.

Доказательство. Положим $\varphi_n = |f_n - f|$, тогда $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\searrow} 0$.

Ввиду монотонности последовательности φ_n, достаточно показать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \ \forall x \in [a, b] \ \varphi_n(x) < \varepsilon.$$

Допустим противное, для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_n \in [a, b]$, для которой $\varphi_n(x_n) \geq \varepsilon$. Из последовательности $\{x_n\}$ извлечем сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} x_0 \in [a, b]$.

По непрерывности функций φ_n при всех n справедливо соотношение

$$\varphi_n\left(x_{n_k}\right) \underset{k\to\infty}{\to} \varphi_n\left(x_0\right)$$

При фиксированном n для достаточно больших k имеем

$$\varphi_n\left(x_{n_k}\right) \geq \varphi_{n_k}\left(x_{n_k}\right) \geq \varepsilon .$$

Предельным переходом ($k \to \infty$) в неравенстве $\varphi_n\left(x_{n_k}\right) \geq \varepsilon$ получаем неравенство

$$\varphi_n\left(x_0\right) \geq \varepsilon ,$$

противоречащее условию $\varphi_n\left(x_0\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Теорема 2'.

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ — функциональный ряд на отрезке $[a, b]$, состоящий из положительных, непрерывных функций.

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ непрерывна на $[a, b]$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится равномерно на $[a, b]$.

2^0. Предельный переход

Теорема 3.

Пусть функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве E к предельной функции f.

$$\forall n \quad f_n(x) \underset{x\to x_0}{\to} A_n \text{ (} x_0 \text{ — предельная точка для множества } E \text{).}$$

Тогда последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится; предел $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ этой последовательности является и пределом для функции f,

$$f(x) \underset{\substack{x\to x_0 \\ x\in E}}{\to} A .$$

Иными словами, возможна перестановка предельных переходов:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) .$$

Доказательство.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Подберем такое N, что при $m, n > N$ справедливо неравенство

$$\forall x \in E \quad \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon .$$

Предельный переход при $x \to x_0$ дает неравенство

$$\left| A_n - A_m \right| \leq \varepsilon .$$

Последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной и, следовательно, сходится. Положим $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Установим соотношение $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} A$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем такое n_0, что $\left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех $x \in E$ и $\left|A_{n_0} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}$. Поскольку $f_{n_0}(x) \underset{x\to x_0}{\to} A_{n_0}$, то найдется такое $\delta > 0$, что $\left|f_{n_0}(x) - A_{n_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$.

Для таких x получаем неравенство

$$\left|f(x) - A\right| \le \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - A_{n_0}\right| + \left|A_{n_0} - A\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

так что $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} A$.

Теорема 3'.

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ равномерно сходится на множестве E,

$$\forall n \;\; f_n(x) \underset{x\to x_0}{\to} A_n.$$

Тогда числовой ряд $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится, $S(x) \underset{x\to x_0}{\to} A$.

Здесь оказалось возможным переставить операции суммирования и предельного перехода:

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

3⁰. Дифференцирование

Теорема 4.

Пусть функциональная последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из дифференцируемых функций на промежутке Δ. Сама последовательность сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in \Delta$, а последовательность производных $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на промежутке Δ к некоторой функции φ.

Тогда последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на всем промежутке Δ (и даже равномерно, если Δ — конечный промежуток), предельная функция $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ дифференцируема и, наконец, $f' = \varphi$.

Последнее равенство можно записать в виде

$$\left(\lim_{n\to\infty} f\right)' = \left(\lim_{n\to\infty} f'\right)$$

Доказательство

Рассмотрим функциональную последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} : \psi_n(x) = \dfrac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$.

(Последовательность рассматривается на $\Delta \setminus \{x_0\}$). Установим ее равномерную сходимость.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Опираясь на равномерную сходимость последовательности производных, мы можем найти такое N, что при всех $n, m > N$ и при всех $x \in \Delta$ выполняется неравенство

$$\left| f_n'(x) - f_m'(x) \right| < \varepsilon .$$

Применяя теорему Лагранжа к функции $f_n - f_m$, запишем разность

$$\psi_n(x) - \psi_m(x) = \frac{\left(f_n(x) - f_m(x) \right) - \left(f_n(x_0) - f_m(x_0) \right)}{x - x_0}$$

в виде

$$\psi_n(x) - \psi_m(x) = f_n'(\xi) - f_m'(\xi) .$$

Мы приходим к неравенству $\left| \psi_n(x) - \psi_m(x) \right| < \varepsilon$. По критерию Коши последовательность $\left\{ \psi_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на $\Delta \setminus \left\{ x_0 \right\}$. Положим $\psi = \lim\limits_{n \to \infty} \psi_n$.

Во-первых, отсюда следует сходимость последовательности $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$.

Отметим равенство $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Во-вторых, последовательность $\left\{ \psi_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы о предельном переходе. Предельная функция ψ имеет при $x \to x_0$ предел, равный $\lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x_0) = \varphi(x_0)$, т.е. функция f имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Рассуждение можно повторить с заменой точки x_0 на произвольную точку промежутка Δ. Функция f имеет во всех точках промежутка Δ производную, $f' = \varphi$.

Теорема 4'.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ — функциональный ряд из дифференцируемых на Δ функций, ряд $T = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ равномерно сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится в некоторой точке $x_0 \in \Delta$.

Тогда $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится,

$$S' = T ,$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n' .$$

4^0. Интегрирование

Теорема 5.

Пусть функциональная последовательность $\left\{ f_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из непрерывных функций и равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. $f_n \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} f$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,,$$

возможен предельный переход под знаком интеграла.

$$I_n=\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\to} I=\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

Доказательство.

Существование всех интегралов обеспечено непрерывностью рассматриваемых функций.

Положим $\rho_n=\sup\limits_{x\in[a,\,b]}\left|f_n(x)-f(x)\right|$. По условию $\rho_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, и мы можем написать

$$\left|I_n-I\right|\le\int_a^b\left|f_n(x)-f(x)\right|dx\le\rho_n\cdot(b-a)\underset{n\to\infty}{\to}0\,.$$

Теорема доказана.

Дополнение к теореме 5. Рассмотрим интегралы с переменным верхним пределом:

$$I_n(x)=\int_a^x f_n(t)\,dt,\ I(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Тогда $I_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} I$ на $[a,\,b]$.

Действительно,

$$\left|I_n(x)-I(x)\right|\le\int_a^x\left|f_n(t)-f(t)\right|dt\le\rho_n\cdot(x-a)\le\rho_n\cdot(b-a)\underset{n\to\infty}{\to}0\,.$$

Теорема 5'.

Пусть $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ — равномерно сходящийся ряд из непрерывных функций на $[a,\,b]$.

Тогда ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_a^b S(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Замечание. Условия теорем 5, 5' можно ослабить, потребовать только интегрируемости функций. При этом следует доказать интегрируемость предельной функции (суммы ряда). Предельный переход обосновывается так же, как в доказанной теореме.

Вспомним достаточное условие интегрируемости:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\tau\ \ S_\tau-s_\tau<\varepsilon\,,$$

$$S_\tau=\sum_{i=1}^{p}M_i\Delta x_i,\ s_\tau=\sum_{i=1}^{p}m_i\Delta x_i$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Равномерная сходимость позволяет найти такое n_0, что

$$\forall x\in[a,\,b]\ \left|f_{n_0}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\,.$$

Поскольку функция f_{n_0} интегрируема, то

$$\exists\tau\ \ S_\tau\left(f_{n_0}\right)-s_\tau\left(f_{n_0}\right)<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Оценим еще разность между суммами Дарбу для функций f и f_{n_0}:

$$M_i(f) \le M_i(f_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{p} M_i(f)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{p}\left(M_i(f_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}\right)\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} M_i(f_{n_0})\Delta x_i + \sum_{i=1}^{p}\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\Delta x_i = S_\tau(f_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Аналогично и для нижних сумм Дарбу:

$$s_\tau(f) \ge s_\tau(f_{n_0}) - \frac{\varepsilon}{4}.$$

В итоге

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) \le S_\tau(f_{n_0}) - s_\tau(f_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

функция f интегрируема.

Примеры. 1) $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ x \in [0, 1]$. Сходимость не является равномерной, поскольку $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{2n}e^{-1/2}$. $I_n = \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = -e^{-nx^2}\Big|_0^1 = 1 - e^{-n} \underset{n\to\infty}{\to} 1 \ne 0$. Предельный переход под знаком интеграла оказался невозможным. Причина — отсутствие равномерной сходимости.

2) Отметим, что равномерная сходимость все же не является необходимым условием для осуществимости предельного перехода. Так, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ x \in [0, 1]$, сходимость не является равномерной, но $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2n}\ln\left(1+n^2\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.