Кратные криволинейные и поверхностные интегралы

Глава I. Двойной интеграл

§ 1. Интеграл Римана на прямоугольнике

1⁰. $\Pi = [a, b]\times[c, d]$ — прямоугольник, $\mu\Pi = (b-a)(d-c)$ — площадь (мера) прямоугольника.

Предложение. Мера прямоугольника

1) однородна: если $\Delta_\lambda = [\lambda a, \lambda b]\times[\lambda c, \lambda d]$, то $\mu\Delta_\lambda = \lambda^2\mu\Delta$;

2) инвариантна: $\mu(x_0 + \Delta) = \mu\Delta$

3) аддитивна: если $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{k}\Delta_i$ и прямоугольники $\Delta_1,\ldots,\Delta_k$ попарно не имеют общих внутренних точек, то $\mu\Delta = \sum\limits_{i=1}^{k}\mu\Delta_i$

4) Если $\Delta \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k}\Delta_i$, то $\mu\Delta \le \sum\limits_{i=1}^{k}\mu\Delta_i$.

Для клеточной фигуры, составленной из прямоугольников, попарно не имеющих общих внутренних точек, площадью называется сумма площадей составляющих прямоугольников.

2⁰. Разбиение прямоугольника.

$\Pi = [a, b]\times[c, d]$ — прямоугольник, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_l = d$ — разбиения отрезков. Прямоугольники $\Delta_{ij} = [a_{i-1}, a_i]\times[b_{j-1}, b_j]$ образуют разбиение τ прямоугольника Π.

Занумеруем элементы разбиения одним индексом: $\tau = \{\Delta_1,\ldots,\Delta_m\}$

Число $\lambda_\tau = \max\limits_i \operatorname{diam}(\Delta_i)$ называется рангом (мелкостью) разбиения τ .

Набор точек $\xi = \{\xi_1,\ldots,\xi_m\}$, $\xi_i \in \Delta_i$ называется выборкой из разбиения τ .

3⁰. Интегральная сумма.

Пусть f — вещественная ограниченная функция на прямоугольнике Π, τ — разбиение, ξ — выборка. $\sigma(f,\tau,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{m} f(\xi_i)\mu\Delta_i$ — интегральная сумма.

4⁰. Интеграл Римана. Пусть f — вещественная ограниченная функция на прямоугольнике Π. Число I называется двойным интегралом Римана функции f по прямоугольнику Π, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \lambda_\tau < \delta \Rightarrow \left|I - \sigma(f,\tau,\xi)\right| < \varepsilon .$$

Представляется естественным сказать, что двойной интеграл — это предел $\lim\limits_{\lambda_\tau\to 0}\sigma(f,\tau,\xi)$ интегральных сумм.

Для двойного интеграла используются обозначения

$$\iint\limits_{\Pi} f(x, y)\,dxdy,\ \int\limits_{\Pi} f(u)\,du,\ \int\limits_{\Pi} f .$$

Если функция f имеет интеграл, она называется интегрируемой.

§ 2. Суммы Дарбу.

1^0. Определение. Пусть f — вещественная ограниченная функция на прямоугольнике Π, $\tau=\{\Delta_1,\ldots,\Delta_m\}$ — разбиение прямоугольника ;

$$m_i=\inf f(\Delta_i),\ M_i=\sup f(\Delta_i),\ i=1,\ldots,m.$$

$$s_\tau=\sum_{i=1}^m m_i\mu\Delta_i \text{ — нижняя сумма Дарбу,}$$

$$S_\tau=\sum_{i=1}^m M_i\mu\Delta_i \text{ — верхняя сумма Дарбу.}$$

2^0. Свойства сумм Дарбу.

1) $s_\tau\le\sigma(f,\tau,\xi)\le S_\tau$, $s_\tau=\inf\limits_\xi\sigma(f,\tau,\xi)$, $S_\tau=\sup\limits_\xi\sigma(f,\tau,\xi)$.

2) Если τ_2 — измельчение τ_1, то

$$s_{\tau_1}\le s_{\tau_2}\le S_{\tau_2}\le S_{\tau_1}.$$

3) Для любых разбиений τ_1,τ_2

$$s_{\tau_1}\le S_{\tau_2}.$$

3^0. Определение.

$$I_*=\sup_\tau s_\tau \text{ — нижний интеграл,}$$

$$I^*=\inf_\tau S_\tau \text{ — верхний интеграл Дарбу.}$$

4^0. Лемма Дарбу.

$$I_*=\lim_{\lambda_\tau\to0}s_\tau,\ I^*=\lim_{\lambda_\tau\to0}S_\tau.$$

Доказательство.

1) Расстояние между множествами.

Пусть $A,B\subset\mathbb{R}^2$. Число $\rho(A,B)=\inf\limits_{x\in A,y\in B}\rho(x,y)$ называется расстоянием между множествами A,B.

Если $\rho(A,B)>0$, то множества A,B не пересекаются. Если A,B не пересекаются, A — компакт, B замкнуто, то $\rho(A,B)>0$.

Пусть $\rho(A,B)=\delta>0$, $\operatorname{diam}(C)<\delta$, $A\cap C\ne\varnothing$. Тогда $B\cap C=\varnothing$.

2) Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Подберем разбиение $\tau_0=\{\Delta_1,\ldots,\Delta_m\}$, для которого $S_{\tau_0}<I^*+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $\alpha\in(0,1)$, Δ_i^α — прямоугольник, подобный Δ_i с коэффициентом подобия a и центром подобия в центре прямоугольника.

Положим $M=\sup|f(\Pi)|$ и подберем α так, чтобы

$$\sum_{i=1}^m\mu\Delta_i^\alpha>\mu\Pi-\frac{\varepsilon}{4M}.$$

Если положить $\Pi^\alpha=\bigcup\limits_{i=1}^m\Delta_i^\alpha$, то последнее неравенство превратится в $\mu\left(\Pi\setminus\Pi^\alpha\right)<\dfrac{\varepsilon}{4M}$.

Подберем такое $\delta > 0$, что $\rho\left(\Delta_i^\alpha, \Pi \setminus \Delta_i\right) > \delta > 0$ при всех $i = 1, \ldots, m$.

Пусть $\tau = \{e_1, \ldots, e_l\}$ — разбиение прямоугольника Π, для которого $\lambda_\tau < \delta$. Если при некоторых i, j окажется, что $e_j \cap \Delta_i^\alpha \neq \varnothing$, то $e_j \subset \Delta_i$. Разбиение τ состоит из "хороших" множеств ($e_j \subset \Delta_i$) и "плохих" ($e_j \subset \Pi \setminus \Pi^\alpha$).

Образуем разбиение $\tau_1 = \{u_1, \ldots, u_p\}$ — общее измельчение для τ_0, τ. Тогда $S_{\tau_1} \le S_{\tau_0}$, $S_{\tau_1} < I^* + \dfrac{\varepsilon}{2}$. В состав τ_1 входят все "хорошие" прямоугольники из τ. Будем считать, что $e_1, \ldots, e_{l'}$ — хорошие множества, а $e_{l'+1}, \ldots, e_l$ — плохие; $u_1 = e_1, \ldots, u_{l'} = e_{l'}$, а $u_{l'+1}, \ldots, u_p$ получены измельчением плохих множеств $e_{l'+1}, \ldots, e_l$. При вычислении $S_\tau - S_{\tau_1}$ суммирование следует распространить на "плохие" прямоугольники:

$$S_\tau - S_{\tau_1} = \sum_{j=l'+1}^{l} M_{e_j} \mu e_j - \sum_{j=l'+1}^{p} M_{u_j} \mu u_j \le M\left(\sum_{j=l'+1}^{l} \mu e_j + \sum_{j=l'+1}^{p} \mu u_j\right) \le 2M\mu\left(\Pi \setminus \Pi^\alpha\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Мы приходим к выводу, что

$$S_\tau < S_{\tau_1} + \frac{\varepsilon}{2},\ S_\tau < I^* + \varepsilon.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ мы нашли такое $\delta > 0$, что для всех разбиен6ий τ, удовлетворяющих условию $\lambda_\tau < \delta$, справедливо неравенство $I^* \le S_\tau < I^* + \varepsilon$. Это и означает, что $I^* = \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} S_\tau$. Лемма доказана.

5⁰. Теорема 1. Критерий интегрируемости Дарбу.

Пусть f — вещественная ограниченная функция на прямоугольнике Π.

Тогда равносильны условия:

1) f интегрируема;

2) $S_\tau - s_\tau \underset{\lambda_\tau \to 0}{\to} 0$ (т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \lambda_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$);

3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \tau \quad S_\tau - s_\tau < \varepsilon$;

4) $I_* = I^*$.

Доказательство.

Доказательство проведем по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Пусть функция f интегрируема, I — ее интеграл. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Опираясь на определение интеграла, найдем такое $\delta > 0$, что $I - \varepsilon < \sigma(f, \tau, \xi) < I + \varepsilon$, если только $\lambda_\tau < \delta$. Для таких разбиений получаем условия

$$I - \varepsilon \le s_\tau \le S_\tau \le I + \varepsilon,\ S_\tau - s_\tau \le 2\varepsilon.$$

Условие 2) установлено.

Из условия 2) условие 3) получается очевидным образом.

Пусть выполнено условие 3). Для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем разбиение τ, для которого $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Теперь $I^* - I_* \le S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, так что $I^* \le I_*$.

Наконец, при выполнении условия 4) положим $I = I_* = I^*$. Поскольку при любых τ, ξ выполняется неравенство

$$s_\tau \le \sigma(f, \tau, \xi) \le S_\tau,$$

а по лемме Дарбу $S_\tau,\ s_\tau \underset{\lambda_\tau\to 0}{\to} I$, то по теореме о милиционерах получается соотношение

$$\sigma\left(f,\tau,\xi\right) \underset{\lambda_\tau\to 0}{\to} I,$$

I — интеграл функции f , f интегрируема.

§ 3. Интегрируемость непрерывной функции

Теорема 1. Пусть функция f непрерывна на прямоугольнике Π.
Тогда f интегрируема.
Доказательство.
Функция f равномерно непрерывна на прямоугольнике Π. Положим $M=\max\limits_{x\in\Pi}\left|f\left(x\right)\right|$.
Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Подберем такое $\delta>0$, что

$$\rho\left(x,y\right)<\delta \ \Rightarrow\ \left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|<\frac{\varepsilon}{\mu\Pi}.$$

Пусть $\tau=\left\{\Delta_1,\ldots,\Delta_m\right\}$ — разбиение, для которого $\lambda_\tau<\delta$. Тогда $M_i-m_i\le\dfrac{\varepsilon}{\mu\Pi}$ и

$$S_\tau-s_\tau=\sum_{i=1}^{m}\left(M_i-m_i\right)\mu\Delta_i\le\frac{\varepsilon}{\mu\Pi}\sum_{i=1}^{m}\mu\Delta_i=\frac{\varepsilon}{\mu\Pi}\mu\Pi=\varepsilon.$$

Итак, $S_\tau-s_\tau \underset{\lambda_\tau\to 0}{\to} 0$, функция f интегрируема.

§ 4. Критерий Лебега

1⁰. Определение. Множество $e\subset\mathbb{R}^2$ есть множество меры нуль в смысле Лебега, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать систему прямоугольников $\left\{\Delta_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, такую что $e\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu\Delta_k<\varepsilon$.

Заметим, что для компактных множеств меры нуль систему прямоугольников можно выбрать конечной. (Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu\Delta_k<\dfrac{\varepsilon}{4}$ и $e\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k$, то $e\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}Int\Delta_k^{(2)}$, $e\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}Int\Delta_k^{(2)}$, $e\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}\Delta_k^{(2)}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu\Delta_k^{(2)}=4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu\Delta_k<4\dfrac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$).

2⁰. 1) Конечные и счетные множества являются множествами меры нуль.
2) Подмножество множества меры нуль является множеством меры нуль.
3) Объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль — множество меры нуль.
4) Невырожденный прямоугольник не является множеством меры нуль.
5) Множество точек с рациональными координатами — множество меры нуль.
6) График непрерывной функции одной переменной — множество меры нуль.
3⁰. Принято говорить, что некоторое свойство имеет место почти везде (п.в.) на множестве E, если существует множество e меры нуль, т.ч. это свойство имеет место на $E\setminus e$.

4⁰. Теорема 1. Критерий интегрируемости Лебега.
Для того, чтобы ограниченная функция была интегрируемой на прямоугольнике, необходимо и достаточно, чтобы функция была непрерывной п.в.
Теорему примем без доказательства.

§ 5. Интеграл по множеству

1⁰. Пусть E — ограниченное множество; f — ограниченная функция, определенная по крайней мере на множестве E. Подберем прямоугольник $\Pi \supset E$. Можно считать, что f определена на всем прямоугольнике Π (в противном случае доопределим функцию нулем). Если функция $f \cdot \chi_E$ интегрируема на прямоугольнике Π, то назовем функцию f интегрируемой по множеству E и положим

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Pi f(x,y)\,\chi_E(x,y)\,dxdy.$$

Здесь χ_E — характеристическая функция (индикатор) множества E,

$$\chi_E(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in E \\ 0, & (x,y) \notin E \end{cases}$$

Замечание. Определение корректно, выбор прямоугольника не влияет на интегрируемость и значение интеграла.

2⁰. Мера Жордана. Если существует $\int\limits_E dxdy$, множество E называется измеримым по Жордану, а число

$$\mu E = \int\limits_E \mathbf{1}$$

называется мерой Жордана или площадью множества E.

Если $\Pi \supset E$, то $\mu E = \int\limits_\Pi \chi_E$. Точки разрыва функции χ_E — это граничные точки множества E. Множество E измеримо в том и только в том случае, если его граница ∂E есть множество меры нуль.

Операции объединения, пересечения, вычитания сохраняют измеримость.

μE — предел сумм Дарбу функции χ_E. Пусть τ — разбиение прямоугольника, тогда s_τ — сумма площадей прямоугольников, содержащихся в E, S_τ — сумма площадей прямоугольников, имеющих непустое пересечение с E. s_τ — площадь вписанного в E, а S_τ — площадь описанного около E прямоугольника. μE — общий предел площадей вписанных и описанных многоугольников. Таким образом, новое определение площади ($\int\limits_E dxdy$) равносильно ранее принятому.

3⁰. В дальнейшем интегрирование ведется по измеримым множествам. В соответствии с критерием Лебега функция интегрируема на измеримом множестве в том и только в том случае, если она п.в. непрерывна.

4⁰. Пусть f интегрируема на измеримом множестве E, I — интеграл. Для разбиения $\tau = \{e_1, \ldots, e_m\}$ — множества E на измеримые подмножества, и выборки $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\,\mu e_i.$$

Можно показать, что интеграл равен пределу интегральных сумм.

§ 6. Общие свойства интеграла

1⁰. Линейность

Теорема 1. f, g интегрируемы на множестве E. $h=\alpha f+\beta g$.
Тогда h интегрируема,
$$\int_E h=\alpha\int_E f+\beta\int_E g. \tag{1}$$
Доказательство. Пусть $\Pi\supset E$, τ — разбиение, ξ — выборка,
$$\sigma(h\chi_E,\tau,\xi)=\alpha\sigma(f\chi_E,\tau,\xi)+\beta\sigma(g\chi_E,\tau,\xi)\underset{\lambda_\tau\to 0}{\to}\alpha\int_E f+\beta\int_E g.$$
Замечания
1) Если f интегрируема и равна нулю п.в. на E, то $\int_E f=0$ ($\forall\tau\ \exists\xi\ \sigma(f,\tau,\xi)=0$, предельный переход дает равенство нулю интеграла).
2) Если f,g интегрируемы и $f(x)=g(x)$ п.в. на E, то $\int_E f=\int_E g$.

2^0. Аддитивность.
Теорема 2. Пусть f — ограниченная функция на $E=E_1\cup E_2$, E_1, E_2 измеримы.
Тогда
1) f интегрируема на E $\Leftrightarrow$ f интегрируема на E_1, E_2;
2) при условии $\mu(E_1\cap E_2)=0$ имеет место равенство
$$\int_E f=\int_{E_1} f+\int_{E_2} f. \tag{2}$$
Доказательство. 1) Следует из критерия Лебега.
2) Поскольку $\chi_E=\chi_{E_1}+\chi_{E_2}-\chi_{E_1\cap E_2}$, то
$$\int_E f=\int_\Pi f\chi_E=\int_\Pi f\chi_{E_1}+\int_\Pi f\chi_{E_2}-\int_\Pi f\chi_{E_1\cap E_2}=\int_{E_1} f+\int_{E_2} f$$
($\mu(E_1\cap E_2)=0$, $f\chi_{E_1\cap E_2}=0$ п.в., $\int_\Pi f\chi_{E_1\cap E_2}=0$).
Следствие. Аддитивность меры Жордана.
E_1, E_2 измеримы, $\mu(E_1\cap E_2)=0$.
Тогда $\mu(E_1\cup E_2)=\mu E_1+\mu E_2$.

3^0. Монотонность интеграла.
Теорема 3.
1) $f\ge 0$, интегрируема на E.
Тогда
$$\int_E f\ge 0. \tag{3}$$
2) $f\le g$ интегрируемы на E.
Тогда
$$\int_E f\le\int_E g. \tag{4}$$
Доказательство.
1) $\Pi\supset E$, $\tau=\{\Pi\}$, $s_\tau\ge 0$, $\int_E f\ge s_\tau\ge 0$.
2) $h=g-f\ge 0$, $\int_E g=\int_E f+\int_E h\ge\int_E f$.

Упражнение $f \geq 0$, интегрируема, $\int\limits_E f = 0$. Тогда $f(x) = 0$ п.в.

4^0. Оценки интеграла.

1) f интегрируема на измеримом множестве E.

$$\forall x \in E \ m \leq f(x) \leq M . \tag{5}$$

Тогда

$$m\mu E \leq \int\limits_E f \leq M\mu E . \tag{6}$$

2) f интегрируема на измеримом множестве E.

Тогда

$$\left|\int\limits_E f\right| \leq \int\limits_E |f| . \tag{7}$$

3) f интегрируема на измеримом множестве E.

$$\forall x \in E \ |f(x)| \leq M . \tag{8}$$

Тогда

$$\left|\int\limits_E f\right| \leq M\mu E . \tag{9}$$

5^0. **Теорема 4 О среднем.**

f непрерывна на измеримом линейно связном множестве E.

Тогда

$$\exists \xi \in E \ \ I = \int\limits_E f = f(\xi)\mu E .$$

Доказательство.

Положим $m = \inf f(E)$, $M = \sup f(E)$. Тогда

$$m\mu E \leq \int\limits_E f \leq M\mu E ,$$

$\exists C \ m \leq C \leq M \ \ I = C\mu E$. По теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции $\exists \xi \in E \ C = f(\xi)$.

Обобщенная теорема о среднем.

Пусть $g \geq 0$, интегрируема, f удовлетворяет условиям теоремы 4.

Тогда

$$\exists \xi \in E \ \int\limits_E fg = f(\xi)\int\limits_E g$$

§ 7. Сведение двойного интеграла к повторному

1^0. Интегрирование по прямоугольнику

f — интегрируемая функция на прямоугольнике $\Pi = [a,b]\times[c,d]$,

$$I = \iint\limits_{\Pi} f(x,y)\,dxdy .$$

Определим функцию F на $[a,b]$:

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy . \tag{1}$$

Если интеграл (1) не существует при некотором x, в качестве $F(x)$ возьмем любое число, лежащее между нижним и верхним интегралами.
Теорема 1. F интегрируема на $[a,b]$,

$$I = \int_a^b F(x)\,dx\,, \tag{2}$$

т.е.

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy\,. \tag{3}$$

В (3) справа стоит повторный интеграл.
Доказательство.
Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем такое $\delta > 0$, что

$$\lambda_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon\,.$$

Пусть $\tau_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ — разбиение отрезка $[a,b]$ с рангом $\lambda_{\tau_x} < \delta$. Подберем разбиение $\tau_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_l = d$, настолько мелкое, что разбиение

$$\tau = \left\{\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\right\}_{i=1,\dots,k;\, j=1,\dots,l}$$

имеет ранг $\lambda_\tau < \delta$.
Рассмотрим интегральную сумму функции F:

$$\sigma(F,\tau_x,\xi_x) = \sum_{i=1}^k F(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^k \int_c^d f(\xi_i,y)\,dy\Delta x_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)\,dy\Delta x_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l M_{ij}\Delta y_j \Delta x_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l M_{ij}\mu\Delta_{ij} = S_\tau\,.$$

Аналогично получается неравенство

$$\sigma(F,\tau_x,\xi_x) \ge s_\tau\,.$$

Итак,

$$I - \varepsilon < s_\tau \le \sigma(F,\tau_x,\xi_x) \le S_\tau < I + \varepsilon\,,$$

F интегрируема на $[a,b]$, $I = \int_a^b F(x)\,dx$.

Замечания.
1) Если $f(\xi_i, y)$ не является интегрируемой, то $F(\xi_i)$ не превосходит верхнего интеграла, а верхний интеграл не превосходит верхней суммы Дарбу:

$$F(\xi_i) \le \sum_{j=1}^l \sup_{y\in[y_{j-1},y_j]} f(\xi_i,y)\Delta y_j \le \sum_{j=1}^l M_{ij}\Delta y_j\,.$$

2) Если f интегрируема на Π, то $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ существует при п.в. $x \in [a,b]$.

Действительно, пользуясь нижним и верхним интегралами, построим $F_1 \le F_2$. Тогда

$$\int_a^b F_1(x)\,dx = I = \int_a^b F_2(x)\,dx$$

и $F_1 = F_2$ п.в.

2⁰. Интегрирование по криволинейной трапеции

Теорема 2. φ, ψ непрерывны на $[a, b]$, $\varphi \le \psi$,

$$E = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\};$$

f — интегрируема на E.

Тогда

$$\iint\limits_E f(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy. \tag{4}$$

Доказательство.

Подберем прямоугольник

$$\Pi = [a,b]\times[c,d] \supset E.$$

Теперь

$$\int\limits_E f = \int\limits_\Pi f\chi_E = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,\chi_E(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

Если $f = \mathbf{1}$, мы получаем знакомую формулу

$$\mu E = \int\limits_a^b \big(\psi(x) - \varphi(x)\big)\,dx \tag{5}$$

вычисления площади криволинейной трапеции.

Пример.

$$\iint\limits_{E: a\le x\le b,\ c\le y\le d} f(x)g(y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x)g(y)\,dy\right)dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \int\limits_c^d g(y)\,dy.$$

В рассмотренной ситуации интегрирования произведения функций одной переменной по прямоугольнику двойной интеграл распался в произведение однократных интегралов.

§ 8. Замена переменных в двойном интеграле

1⁰. Пусть $\Phi : G' \to G$ — диффеоморфизм области G' на область G,

$$\Phi : \begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v). \end{cases}$$

J — якобиан отображения Φ:

$$J = J_\Phi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

J не обращается в нуль ни в одной точке.

Лемма 1.

1) E' — множество меры нуль.

Тогда $\Phi(E')$ — множество меры нуль.

2) E' — компакт нулевой площади.

Тогда $\Phi(E')$ — компакт нулевой площади.

3) E' — измеримый компакт.

Тогда $\Phi(E')$ — измеримый компакт.

Доказательство.
1) Область G' можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых прямоугольников. Объединение счетного набора множеств меры нуль есть множество меры нуль. Поэтому достаточно доказать утверждение для множества E', лежащего в замкнутом прямоугольнике $\Pi' \subset G'$.
Поскольку Φ непрерывно дифференцируемо, то

$$\exists M \ \forall w_1, w_2 \in \Pi' \ \rho\left(\Phi(w_1), \Phi(w_2)\right) \le M \cdot \rho(w_1, w_2)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем покрытие $\{\Delta_i'\}_{i=1}^{\infty}$ множества E' квадратами, такое что $\sum_{i=1}^{\infty} \mu\Delta_i' < \frac{\varepsilon}{2M^2}$.
Множества $\Phi(\Delta_i')$ покрывают $E = \Phi(E')$. Пусть w_i — центры квадратов Δ_i', $z_i = \Phi(w_i)$, Δ_i — квадрат с центром z_i, полученный увеличением линейных размеров Δ_i' в $\sqrt{2}M$ раз.

Тогда $\Phi(\Delta_i') \subset \Delta_i$, $E \subset \bigcup_i \Delta_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu\Delta_i < \varepsilon$, E — множество меры нуль.

2) $\Phi(E')$ — компакт меры нуль, поэтому $\mu\left(\Phi(E')\right) = 0$.

3) E' измеримо, $\mu(\partial E') = 0$, $\mu\left(\Phi(\partial E')\right) = 0$, но $\partial E = \Phi(\partial E')$, так что $\mu(\partial E) = 0$, E измеримо.
Следствие. Если f интегрируема на измеримом компакте E, то функция $f \circ \Phi \cdot |J|$ интегрируема на E'.
2^0. Теорема 1. Пусть при перечисленных выше условиях $E \subset G$ — измеримый компакт, $E = \Phi(E')$, f — интегрируемая функция на E.

Тогда $f \circ \Phi \cdot |J|$ интегрируема на E' и

$$\iint\limits_{E} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{E'} f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) \left|J(u,v)\right| dudv. \qquad (1)$$

Доказательство.
Случай простейшего диффеоморфизма.
Диффеоморфизм Φ назовем простейшим, если он воздействует только на одну из координат, т.е. описывается системой уравнений

$$\begin{cases} x = u, \\ y = \psi(u,v), \end{cases} \frac{\partial \psi}{\partial v} \ne 0 \ \text{или} \ \begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = v, \end{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \ne 0$$

Лемма 2. Формула (1) справедлива для простейшего диффеоморфизма.
Доказательство.
Пусть $E' = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$ — прямоугольник. Для определенности, считаем, что $\frac{\partial \psi}{\partial v} > 0$,

$$\Phi: \begin{cases} x = u, \\ y = \psi(u,v), \end{cases} \text{тогда } J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

E — криволинейная трапеция $a_1 \le x \le b_1$, $\psi(x, c_1) \le y \le \psi(x, d_1)$

Получаются следующие равенства

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{a_1}^{b_1}dx\int\limits_{\psi(x,c_1)}^{\psi(x,d_1)}f(x,y)\,dy=\int\limits_{a_1}^{b_1}dx\int\limits_{c_1}^{d_1}f\left(x,\psi(x,v)\right)\left|\frac{\partial\psi}{\partial v}\right|dv=\iint\limits_{E'}f\left(u,\psi(u,v)\right)\left|J(u,v)\right|dudv.$$

Множество E' более сложной структуры разобьем на прямоугольники, запишем предыдущую формулу для каждого прямоугольника и на основе свойства аддитивности получим формулу для всего множества E'.

Лемма 3. Если формула (1) справедлива для Φ_1 и Φ_2, то она справедлива и для диффеоморфизма $\Phi=\Phi_1\circ\Phi_2$.

Доказательство.

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{E'}f\left(\Phi_1(u,v)\right)\left|J_1(u,v)\right|dudv=$$

$$=\iint\limits_{E''}f\left(\Phi_1\left(\Phi_2(s,t)\right)\right)\left|J_1\left(\Phi_2(s,t)\right)\right|\left|J_2(s,t)\right|dsdt=\iint\limits_{E''}f\left(\Phi(s,t)\right)\left|J(s,t)\right|dsdt,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. Локальное разложение диффеоморфизма в композицию простейших.

$\forall(u_0,v_0)$ $\exists V$ — окрестность точки (u_0,v_0), в пределах которой $\Phi=\Phi_1\circ\Phi_2$, где Φ_1, Φ_2 — простейшие диффеоморфизмы.

Доказательство.

Можно считать, что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\neq 0$.

Определим отображение Φ_2 формулами

$$\begin{cases} s=\varphi(u,v),\\ t=v,\end{cases}$$

тогда $J_{\Phi_2}=\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\neq 0$.

По теореме об обратном отображении Φ_2 обратимо на некоторой окрестности V точки (u_0,v_0). Положим $\Phi_1=\Phi\circ\Phi_2^{-1}$, тогда $\Phi=\Phi_1\circ\Phi_2$, Φ_1, Φ_2 — простейшие.

Завершение доказательства.

Для каждой точки компакта E' подберем круг, на котором диффеоморфизм разлагается в композицию простейших. Из системы кругов, вдвое меньшего радиуса, выделим конечное подпокрытие компакта. Пусть δ — наименьший из радиусов малых кругов. Можно считать, что δ-окрестность множества E' лежит в G'.

Любое множество диаметра меньше δ, пересекающееся с E', лежит в множестве, где возможно разложение диффеоморфизма.

Покроем E' прямоугольниками $\Delta_1',\Delta_2',\ldots,\Delta_m'$, $diam(\Delta_i)<\delta$.

$$\iint\limits_{E'}f\circ\Phi\cdot|J|=\sum_{i=1}^{m}\iint\limits_{E'\cap\Delta_i'}f\circ\Phi\cdot|J|=\sum_{i=1}^{m}\iint\limits_{E\cap\Phi(\Delta_i')}f=\iint\limits_E f.$$

Дополнение. Формула (1) остается справедливой если условия, наложенные на отображение Φ нарушаются на множестве меры нуль, если существуют множества $S'\subset G'$, $S\subset G$ меры нуль, такие что отображение $\Phi: G'\setminus S'\to G\setminus S$ удовлетворяет условиям Теоремы 1.

Примеры.

1) $\begin{cases} x=au+bv,\\ y=cu+dv,\end{cases}$ $J=\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}$.

2) Переход к полярным координатам.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad J = r\,.$$

$$\iint\limits_{E:x^2+y^2\le 1} x^2dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{E}\left(x^2+y^2\right)dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\iint\limits_{E_1:0\le r\le 1, 0\le\varphi\le 2\pi} r^3drd\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 r^3dr = \frac{1}{2}2\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

.3) Интеграл Эйлера-Пуассона $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint\limits_{\substack{0\le r\le +\infty \\ 0\le\varphi\le 2\pi}} e^{-r^2}rdrd\varphi = \int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2}rdr = -2\pi\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} = \pi\,.$$

4) $I = \iint\limits_{E:1\le xy\le 2,\, 1\le\frac{y}{x}\le 4} x^4y^2dxdy$. Выполним замену переменных по формулам $\begin{cases} u = xy, \\ v = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$ Множество E преобразуется в прямоугольник $E_1: 1\le u\le 2,\ 1\le v\le 4$,

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v\,.$$

Таким образом,

$$I = \iint\limits_{E_1} u^3\frac{1}{v}\frac{1}{2v}dudv = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 u^3du\int\limits_1^4\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4}u^4\Big|_1^2\frac{1}{v}\Big|_1^4 = \frac{1}{2}\frac{15}{4}\frac{3}{4} = \frac{45}{32}\,.$$