

Кратные криволинейные и поверхностные интегралы

Глава I. Двойной интеграл

§ 1. Интеграл Римана на прямоугольнике

1⁰. $\Pi = [a, b] \times [c, d]$ — прямоугольник, $\mu\Pi = (b-a)(d-c)$ — площадь (мера) прямоугольника.

Предложение. Мера прямоугольника

1) однородна: если $\Delta_\lambda = [\lambda a, \lambda b] \times [\lambda c, \lambda d]$, то $\mu\Delta_\lambda = \lambda^2 \mu\Delta$;

2) инвариантна: $\mu(x_0 + \Delta) = \mu\Delta$

3) аддитивна: если $\Delta = \bigcup_{i=1}^k \Delta_i$ и прямоугольники $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ попарно не имеют общих

внутренних точек, то $\mu\Delta = \sum_{i=1}^k \mu\Delta_i$

4) Если $\Delta \subset \bigcup_{i=1}^k \Delta_i$, то $\mu\Delta \leq \sum_{i=1}^k \mu\Delta_i$.

Для клеточной фигуры, составленной из прямоугольников, попарно не имеющих общих внутренних точек, площадью называется сумма площадей составляющих прямоугольников.

2⁰. Разбиение прямоугольника.

$\Pi = [a, b] \times [c, d]$ — прямоугольник, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_l = d$ — разбиения отрезков. Прямоугольники $\Delta_{ij} = [a_{i-1}, a_i] \times [b_{j-1}, b_j]$ образуют разбиение τ прямоугольника Π .

Занумеруем элементы разбиения одним индексом: $\tau = \{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}$

Число $\lambda_\tau = \max_i \text{diam}(\Delta_i)$ называется рангом (мелкостью) разбиения τ .

Набор точек $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, $\xi_i \in \Delta_i$ называется выборкой из разбиения τ .

3⁰. Интегральная сумма.

Пусть f — вещественная ограниченная функция на прямоугольнике Π , τ — разбиение, ξ

— выборка. $\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \mu\Delta_i$ — интегральная сумма.

4⁰. Интеграл Римана. Пусть f — вещественная ограниченная функция на прямоугольнике Π . Число I называется двойным интегралом Римана функции f по прямоугольнику Π , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \lambda_\tau < \delta \Rightarrow |I - \sigma(f, \tau, \xi)| < \varepsilon.$$

Представляется естественным сказать, что двойной интеграл — это предел $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma(f, \tau, \xi)$ интегральных сумм.

Для двойного интеграла используются обозначения

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy, \int_{\Pi} f(u) du, \int_{\Pi} f.$$

Если функция f имеет интеграл, она называется интегрируемой.

§ 2. Суммы Дарбу.

1⁰. Определение. Пусть f — вещественная ограниченная функция на прямоугольнике Π , $\tau = \{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}$ — разбиение прямоугольника;

$$m_i = \inf f(\Delta_i), M_i = \sup f(\Delta_i), i = 1, \dots, m.$$

$$s_\tau = \sum_{i=1}^m m_i \mu \Delta_i \text{ — нижняя сумма Дарбу,}$$

$$S_\tau = \sum_{i=1}^m M_i \mu \Delta_i \text{ — верхняя сумма Дарбу.}$$

2⁰. Свойства сумм Дарбу.

1) $s_\tau \leq \sigma(f, \tau, \xi) \leq S_\tau$, $s_\tau = \inf_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi)$, $S_\tau = \sup_{\xi} \sigma(f, \tau, \xi)$.

2) Если τ_2 — измельчение τ_1 , то

$$s_{\tau_1} \leq s_{\tau_2} \leq S_{\tau_2} \leq S_{\tau_1}.$$

3) Для любых разбиений τ_1, τ_2

$$s_{\tau_1} \leq S_{\tau_2}.$$

3⁰. Определение.

$$I_* = \sup_{\tau} s_\tau \text{ — нижний интеграл,}$$

$$I^* = \inf_{\tau} S_\tau \text{ — верхний интеграл Дарбу.}$$

4⁰. Лемма Дарбу.

$$I_* = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} s_\tau, I^* = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_\tau.$$

Доказательство.

1) Расстояние между множествами.

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^2$. Число $\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$ называется расстоянием между множествами A, B .

Если $\rho(A, B) > 0$, то множества A, B не пересекаются. Если A, B не пересекаются, A — компакт, B замкнуто, то $\rho(A, B) > 0$.

Пусть $\rho(A, B) = \delta > 0$, $\text{diam}(C) < \delta$, $A \cap C \neq \emptyset$. Тогда $B \cap C = \emptyset$.

2) Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Подберем разбиение $\tau_0 = \{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}$, для которого

$$S_{\tau_0} < I^* + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\alpha \in (0, 1)$, Δ_i^α — прямоугольник, подобный Δ_i с коэффициентом подобия α и центром подобия в центре прямоугольника.

Положим $M = \sup |f(\Pi)|$ и подберем α так, чтобы

$$\sum_{i=1}^m \mu \Delta_i^\alpha > \mu \Pi - \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Если положить $\Pi^\alpha = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i^\alpha$, то последнее неравенство превратится в $\mu(\Pi \setminus \Pi^\alpha) < \frac{\varepsilon}{4M}$.

Подберем такое $\delta > 0$, что $\rho(\Delta_i^\alpha, \Pi \setminus \Delta_i) > \delta > 0$ при всех $i = 1, \dots, m$.

Пусть $\tau = \{e_1, \dots, e_l\}$ — разбиение прямоугольника Π , для которого $\lambda_\tau < \delta$. Если при некоторых i, j окажется, что $e_j \cap \Delta_i^\alpha \neq \emptyset$, то $e_j \subset \Delta_i$. Разбиение τ состоит из "хороших" множеств ($e_j \subset \Delta_i$) и "плохих" ($e_j \subset \Pi \setminus \Pi^\alpha$).

Образуем разбиение $\tau_1 = \{u_1, \dots, u_p\}$ — общее измельчение для τ_0, τ . Тогда

$S_{\tau_1} \leq S_{\tau_0}$, $S_{\tau_1} < I^* + \frac{\varepsilon}{2}$. В состав τ_1 входят все "хорошие" прямоугольники из τ . Будем считать,

что $e_1, \dots, e_{l'}$ — хорошие множества, а $e_{l'+1}, \dots, e_l$ — плохие; $u_1 = e_1, \dots, u_{l'} = e_{l'}$, а $u_{l'+1}, \dots, u_p$

получены измельчением плохих множеств $e_{l'+1}, \dots, e_l$. При вычислении $S_\tau - S_{\tau_1}$ суммирование следует распространить на "плохие" прямоугольники:

$$S_\tau - S_{\tau_1} = \sum_{j=l'+1}^l M_{e_j} \mu e_j - \sum_{j=l'+1}^p M_{u_j} \mu u_j \leq M \left(\sum_{j=l'+1}^l \mu e_j + \sum_{j=l'+1}^p \mu u_j \right) \leq 2M \mu(\Pi \setminus \Pi^\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Мы приходим к выводу, что

$$S_\tau < S_{\tau_1} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_\tau < I^* + \varepsilon.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ мы нашли такое $\delta > 0$, что для всех разбиений τ , удовлетворяющих условию $\lambda_\tau < \delta$, справедливо неравенство $I^* \leq S_\tau < I^* + \varepsilon$. Это и означает, что $I^* = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} S_\tau$. Лемма доказана.

5⁰. Теорема 1. Критерий интегрируемости Дарбу.

Пусть f — вещественная ограниченная функция на прямоугольнике Π .

Тогда равносильны условия:

- 1) f интегрируема;
- 2) $S_\tau - s_\tau \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} 0$ (т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \lambda_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$);
- 3) $\forall \varepsilon > 0 \exists \tau \quad S_\tau - s_\tau < \varepsilon$;
- 4) $I_* = I^*$.

Доказательство.

Доказательство проведем по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Пусть функция f интегрируема, I — ее интеграл. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Опираясь на определение интеграла, найдем такое $\delta > 0$, что $I - \varepsilon < \sigma(f, \tau, \xi) < I + \varepsilon$, если только $\lambda_\tau < \delta$. Для таких разбиений получаем условия

$$I - \varepsilon \leq s_\tau \leq S_\tau \leq I + \varepsilon, \quad S_\tau - s_\tau \leq 2\varepsilon.$$

Условие 2) установлено.

Из условия 2) условие 3) получается очевидным образом.

Пусть выполнено условие 3). Для произвольного $\varepsilon > 0$ подберем разбиение τ , для которого $S_\tau - s_\tau < \varepsilon$. Теперь $I^* - I_* \leq S_\tau - s_\tau < \varepsilon$, так что $I^* \leq I_*$.

Наконец, при выполнении условия 4) положим $I = I_* = I^*$. Поскольку при любых τ, ξ выполняется неравенство

$$s_\tau \leq \sigma(f, \tau, \xi) \leq S_\tau,$$

а по лемме Дарбу $S_\tau, s_\tau \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} I$, то по теореме о милиционерах получается соотношение

$$\sigma(f, \tau, \xi) \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} I,$$

I — интеграл функции f , f интегрируема.

§ 3. Интегрируемость непрерывной функции

Теорема 1. Пусть функция f непрерывна на прямоугольнике Π .

Тогда f интегрируема.

Доказательство.

Функция f равномерно непрерывна на прямоугольнике Π . Положим $M = \max_{x \in \Pi} |f(x)|$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Подберем такое $\delta > 0$, что

$$\rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\mu\Pi}.$$

Пусть $\tau = \{\Delta_1, \dots, \Delta_m\}$ — разбиение, для которого $\lambda_\tau < \delta$. Тогда $M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{\mu\Pi}$ и

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^m (M_i - m_i) \mu\Delta_i \leq \frac{\varepsilon}{\mu\Pi} \sum_{i=1}^m \mu\Delta_i = \frac{\varepsilon}{\mu\Pi} \mu\Pi = \varepsilon.$$

Итак, $S_\tau - s_\tau \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} 0$, функция f интегрируема.

§ 4. Критерий Лебега

1⁰. Определение. Множество $e \subset \mathbb{R}^2$ есть множество меры нуль в смысле Лебега, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать систему прямоугольников $\{\Delta_k\}_{k=1}^\infty$, такую что $e \subset \bigcup_{k=1}^\infty \Delta_k$ и

$$\sum_{k=1}^\infty \mu\Delta_k < \varepsilon.$$

Заметим, что для компактных множеств меры нуль систему прямоугольников можно выбрать

конечной. (Если $\sum_{k=1}^\infty \mu\Delta_k < \frac{\varepsilon}{4}$ и $e \subset \bigcup_{k=1}^\infty \Delta_k$, то $e \subset \bigcup_{k=1}^\infty \text{Int}\Delta_k^{(2)}$, $e \subset \bigcup_{k=1}^m \text{Int}\Delta_k^{(2)}$, $e \subset \bigcup_{k=1}^m \Delta_k^{(2)}$ и

$$\sum_{k=1}^\infty \mu\Delta_k^{(2)} = 4 \sum_{k=1}^\infty \mu\Delta_k < 4 \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon).$$

2⁰. 1) Конечные и счетные множества являются множествами меры нуль.

2) Подмножество множества меры нуль является множеством меры нуль.

3) Объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль — множество меры нуль.

4) невырожденный прямоугольник не является множеством меры нуль.

5) Множество точек с рациональными координатами — множество меры нуль.

6) График непрерывной функции одной переменной — множество меры нуль.

3⁰. Принято говорить, что некоторое свойство имеет место почти везде (п.в.) на множестве E , если существует множество e меры нуль, т.ч. это свойство имеет место на $E \setminus e$.

4⁰. Теорема 1. Критерий интегрируемости Лебега.

Для того, чтобы ограниченная функция была интегрируемой на прямоугольнике, необходимо и достаточно, чтобы функция была непрерывной п.в.

Теорему примем без доказательства.

§ 5. Интеграл по множеству

1⁰. Пусть E — ограниченное множество; f — ограниченная функция, определенная по крайней мере на множестве E . Подберем прямоугольник $\Pi \supset E$. Можно считать, что f определена на всем прямоугольнике Π (в противном случае доопределим функцию нулем). Если функция $f \cdot \chi_E$ интегрируема на прямоугольнике Π , то назовем функцию f интегрируемой по множеству E и положим

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{\Pi} f(x, y) \chi_E(x, y) dx dy.$$

Здесь χ_E — характеристическая функция (индикатор) множества E ,

$$\chi_E(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in E \\ 0, & (x, y) \notin E \end{cases}$$

Замечание. Определение корректно, выбор прямоугольника не влияет на интегрируемость и значение интеграла.

2⁰. **Мера Жордана.** Если существует $\int_E dx dy$, множество E называется измеримым по Жордану, а число

$$\mu E = \int_E 1$$

называется мерой Жордана или площадью множества E .

Если $\Pi \supset E$, то $\mu E = \int_{\Pi} \chi_E$. Точки разрыва функции χ_E — это граничные точки множества

E . Множество E измеримо в том и только в том случае, если его граница ∂E есть множество меры нуль.

Операции объединения, пересечения, вычитания сохраняют измеримость.

μE — предел сумм Дарбу функции χ_E . Пусть τ — разбиение прямоугольника, тогда s_{τ} — сумма площадей прямоугольников, содержащихся в E , S_{τ} — сумма площадей прямоугольников, имеющих непустое пересечение с E . s_{τ} — площадь вписанного в E , а S_{τ} — площадь описанного около E прямоугольника. μE — общий предел площадей вписанных и описанных многоугольников. Таким образом, новое определение площади ($\int_E dx dy$) равносильно ранее принятому.

3⁰. В дальнейшем интегрирование ведется по измеримым множествам. В соответствии с критерием Лебега функция интегрируема на измеримом множестве в том и только в том случае, если она п.в. непрерывна.

4⁰. Пусть f интегрируема на измеримом множестве E , I — интеграл. Для разбиения $\tau = \{e_1, \dots, e_m\}$ — множества E на измеримые подмножества, и выборки $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{i=1}^m f(\xi_i) \mu e_i.$$

Можно показать, что интеграл равен пределу интегральных сумм.

§ 6. Общие свойства интеграла

1⁰. **Линейность**

Теорема 1. f, g интегрируемы на множестве E . $h = \alpha f + \beta g$.

Тогда h интегрируема,

$$\int_E h = \alpha \int_E f + \beta \int_E g. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $\Pi \supset E$, τ — разбиение, ξ — выборка,

$$\sigma(h\chi_E, \tau, \xi) = \alpha\sigma(f\chi_E, \tau, \xi) + \beta\sigma(g\chi_E, \tau, \xi) \xrightarrow{\lambda_\tau \rightarrow 0} \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

Замечания

1) Если f интегрируема и равна нулю п.в. на E , то $\int_E f = 0$ ($\forall \tau \exists \xi \sigma(f, \tau, \xi) = 0$, предельный переход дает равенство нулю интеграла).

2) Если f, g интегрируемы и $f(x) = g(x)$ п.в. на E , то $\int_E f = \int_E g$.

2⁰. Аддитивность.

Теорема 2. Пусть f — ограниченная функция на $E = E_1 \cup E_2$, E_1, E_2 измеримы.

Тогда

1) f интегрируема на $E \Leftrightarrow f$ интегрируема на E_1, E_2 ;

2) при условии $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$ имеет место равенство

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f. \quad (2)$$

Доказательство. 1) Следует из критерия Лебега.

2) Поскольку $\chi_E = \chi_{E_1} + \chi_{E_2} - \chi_{E_1 \cap E_2}$, то

$$\int_E f = \int_{\Pi} f \chi_E = \int_{\Pi} f \chi_{E_1} + \int_{\Pi} f \chi_{E_2} - \int_{\Pi} f \chi_{E_1 \cap E_2} = \int_{E_1} f + \int_{E_2} f$$

($\mu(E_1 \cap E_2) = 0$, $f \chi_{E_1 \cap E_2} = 0$ п.в., $\int_{\Pi} f \chi_{E_1 \cap E_2} = 0$).

Следствие. Аддитивность меры Жордана.

E_1, E_2 измеримы, $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$.

Тогда $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2$.

3⁰. Монотонность интеграла.

Теорема 3.

1) $f \geq 0$, интегрируема на E .

Тогда

$$\int_E f \geq 0. \quad (3)$$

2) $f \leq g$ интегрируемы на E .

Тогда

$$\int_E f \leq \int_E g. \quad (4)$$

Доказательство.

1) $\Pi \supset E$, $\tau = \{\Pi\}$, $s_\tau \geq 0$, $\int_E f \geq s_\tau \geq 0$.

2) $h = g - f \geq 0$, $\int_E g = \int_E f + \int_E h \geq \int_E f$.

Упражнение $f \geq 0$, интегрируема, $\int_E f = 0$. Тогда $f(x) = 0$ п.в.

4⁰. Оценки интеграла.

1) f интегрируема на измеримом множестве E .

$$\forall x \in E \quad m \leq f(x) \leq M. \quad (5)$$

Тогда

$$m\mu E \leq \int_E f \leq M\mu E. \quad (6)$$

2) f интегрируема на измеримом множестве E .

Тогда

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E |f|. \quad (7)$$

3) f интегрируема на измеримом множестве E .

$$\forall x \in E \quad |f(x)| \leq M. \quad (8)$$

Тогда

$$\left| \int_E f \right| \leq M\mu E. \quad (9)$$

5⁰. Теорема 4 О среднем.

f непрерывна на измеримом линейно связном множестве E .

Тогда

$$\exists \xi \in E \quad I = \int_E f = f(\xi)\mu E.$$

Доказательство.

Положим $m = \inf f(E)$, $M = \sup f(E)$. Тогда

$$m\mu E \leq \int_E f \leq M\mu E,$$

$\exists C \quad m \leq C \leq M \quad I = C\mu E$. По теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции $\exists \xi \in E \quad C = f(\xi)$.

Обобщенная теорема о среднем.

Пусть $g \geq 0$, интегрируема, f удовлетворяет условиям теоремы 4.

Тогда

$$\exists \xi \in E \quad \int_E fg = f(\xi) \int_E g$$

§ 7. Сведение двойного интеграла к повторному

1⁰. Интегрирование по прямоугольнику

f — интегрируемая функция на прямоугольнике $\Pi = [a, b] \times [c, d]$,

$$I = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy.$$

Определим функцию F на $[a, b]$:

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy. \quad (1)$$

Если интеграл (1) не существует при некотором x , в качестве $F(x)$ возьмем любое число, лежащее между нижним и верхним интегралами.

Теорема 1. F интегрируема на $[a, b]$,

$$I = \int_a^b F(x) dx, \quad (2)$$

т.е.

$$\iint_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (3)$$

В (3) справа стоит повторный интеграл.

Доказательство.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем такое $\delta > 0$, что

$$\lambda_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon.$$

Пусть $\tau_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$ с рангом $\lambda_{\tau_x} < \delta$. Подберем разбиение $\tau_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_l = d$, настолько мелкое, что разбиение

$$\tau = \left\{ \Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \right\}_{i=1, \dots, k; j=1, \dots, l}$$

имеет ранг $\lambda_\tau < \delta$.

Рассмотрим интегральную сумму функции F :

$$\begin{aligned} \sigma(F, \tau_x, \xi_x) &= \sum_{i=1}^k F(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^k \int_c^d f(\xi_i, y) dy \Delta x_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \Delta x_i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l M_{ij} \Delta y_j \Delta x_i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l M_{ij} \mu \Delta_{ij} = S_\tau. \end{aligned}$$

Аналогично получается неравенство

$$\sigma(F, \tau_x, \xi_x) \geq s_\tau.$$

Итак,

$$I - \varepsilon < s_\tau \leq \sigma(F, \tau_x, \xi_x) \leq S_\tau < I + \varepsilon,$$

F интегрируема на $[a, b]$, $I = \int_a^b F(x) dx$.

Замечания.

1) Если $f(\xi_i, y)$ не является интегрируемой, то $F(\xi_i)$ не превосходит верхнего интеграла, а верхний интеграл не превосходит верхней суммы Дарбу:

$$F(\xi_i) \leq \sum_{j=1}^l \sup_{y \in [y_{j-1}, y_j]} f(\xi_i, y) \Delta y_j \leq \sum_{j=1}^l M_{ij} \Delta y_j.$$

2) Если f интегрируема на Π , то $F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ существует при п.в. $x \in [a, b]$.

Действительно, пользуясь нижним и верхним интегралами, построим $F_1 \leq F_2$. Тогда

$$\int_a^b F_1(x) dx = I = \int_a^b F_2(x) dx$$

и $F_1 = F_2$ п.в.

2⁰. Интегрирование по криволинейной трапеции

Теорема 2. φ, ψ непрерывны на $[a, b]$, $\varphi \leq \psi$,

$$E = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\};$$

f — интегрируема на E .

Тогда

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy. \quad (4)$$

Доказательство.

Подберем прямоугольник

$$\Pi = [a, b] \times [c, d] \supset E.$$

Теперь

$$\int_E f = \int_{\Pi} f \chi_E = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \chi_E(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

Если $f = 1$, мы получаем знакомую формулу

$$\mu E = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \quad (5)$$

вычисления площади криволинейной трапеции.

Пример.

$$\iint_{E: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d} f(x) g(y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x) g(y) dy \right) dx = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy.$$

В рассмотренной ситуации интегрирования произведения функций одной переменной по прямоугольнику двойной интеграл распался в произведение однократных интегралов.

§ 8. Замена переменных в двойном интеграле

1⁰. Пусть $\Phi: G' \rightarrow G$ — диффеоморфизм области G' на область G ,

$$\Phi: \begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v). \end{cases}$$

J — якобиан отображения Φ :

$$J = J_{\Phi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

J не обращается в нуль ни в одной точке.

Лемма 1.

1) E' — множество меры нуль.

Тогда $\Phi(E')$ — множество меры нуль.

2) E' — компакт нулевой площади.

Тогда $\Phi(E')$ — компакт нулевой площади.

3) E' — измеримый компакт.

Тогда $\Phi(E')$ — измеримый компакт.

Доказательство.

1) Область G' можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых прямоугольников. Объединение счетного набора множеств меры нуль есть множество меры нуль. Поэтому достаточно доказать утверждение для множества E' , лежащего в замкнутом прямоугольнике $\Pi' \subset G'$.

Поскольку Φ непрерывно дифференцируемо, то

$$\exists M \forall w_1, w_2 \in \Pi' \rho(\Phi(w_1), \Phi(w_2)) \leq M \cdot \rho(w_1, w_2)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем покрытие $\{\Delta'_i\}_{i=1}^{\infty}$ множества E' квадратами, такое

$$\text{что } \sum_{i=1}^{\infty} \mu \Delta'_i < \frac{\varepsilon}{2M^2}.$$

Множества $\Phi(\Delta'_i)$ покрывают $E = \Phi(E')$. Пусть w_i — центры квадратов Δ'_i , $z_i = \Phi(w_i)$, Δ_i — квадрат с центром z_i , полученный увеличением линейных размеров Δ'_i в $\sqrt{2}M$ раз.

Тогда $\Phi(\Delta'_i) \subset \Delta_i$, $E \subset \bigcup_i \Delta_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu \Delta_i < \varepsilon$, E — множество меры нуль.

2) $\Phi(E')$ — компакт меры нуль, поэтому $\mu(\Phi(E')) = 0$.

3) E' измеримо, $\mu(\partial E') = 0$, $\mu(\Phi(\partial E')) = 0$, но $\partial E = \Phi(\partial E')$, так что $\mu(\partial E) = 0$, E измеримо.

Следствие. Если f интегрируема на измеримом компакте E , то функция $f \circ \Phi \cdot |J|$ интегрируема на E' .

2⁰. Теорема 1. Пусть при перечисленных выше условиях $E \subset G$ — измеримый компакт, $E = \Phi(E')$, f — интегрируемая функция на E .

Тогда $f \circ \Phi \cdot |J|$ интегрируема на E' и

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \iint_{E'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (1)$$

Доказательство.

Случай простейшего диффеоморфизма.

Диффеоморфизм Φ назовем простейшим, если он воздействует только на одну из координат, т.е. описывается системой уравнений

$$\begin{cases} x = u, \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} \neq 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = v, \end{cases} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0$$

Лемма 2. Формула (1) справедлива для простейшего диффеоморфизма.

Доказательство.

Пусть $E' = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$ — прямоугольник. Для определенности, считаем, что $\frac{\partial \psi}{\partial v} > 0$,

$$\Phi: \begin{cases} x = u, \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad \text{тогда } J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

E — криволинейная трапеция $a_1 \leq x \leq b_1$, $\psi(x, c_1) \leq y \leq \psi(x, d_1)$

Получаются следующие равенства

$$\iint_E f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{\psi(x, c_1)}^{\psi(x, d_1)} f(x, y) dy = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{c_1}^{d_1} f(x, \psi(x, v)) \left| \frac{\partial \psi}{\partial v} \right| dv = \iint_{E'} f(u, \psi(u, v)) |J(u, v)| dudv.$$

Множество E' более сложной структуры разобьем на прямоугольники, запишем предыдущую формулу для каждого прямоугольника и на основе свойства аддитивности получим формулу для всего множества E' .

Лемма 3. Если формула (1) справедлива для Φ_1 и Φ_2 , то она справедлива и для диффеоморфизма $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \iint_E f(x, y) dx dy &= \iint_{E'} f(\Phi_1(u, v)) |J_1(u, v)| dudv = \\ &= \iint_{E''} f(\Phi_1(\Phi_2(s, t))) |J_1(\Phi_2(s, t))| |J_2(s, t)| ds dt = \iint_{E''} f(\Phi(s, t)) |J(s, t)| ds dt, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. Локальное разложение диффеоморфизма в композицию простейших.

$\forall (u_0, v_0) \exists V$ — окрестность точки (u_0, v_0) , в пределах которой $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, где Φ_1, Φ_2 — простейшие диффеоморфизмы.

Доказательство.

Можно считать, что $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0$.

Определим отображение Φ_2 формулами

$$\begin{cases} s = \varphi(u, v), \\ t = v, \end{cases}$$

тогда $J_{\Phi_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0$.

По теореме об обратном отображении Φ_2 обратимо на некоторой окрестности V точки (u_0, v_0) . Положим $\Phi_1 = \Phi \circ \Phi_2^{-1}$, тогда $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, Φ_1, Φ_2 — простейшие.

Завершение доказательства.

Для каждой точки компакта E' подберем круг, на котором диффеоморфизм разлагается в композицию простейших. Из системы кругов, вдвое меньшего радиуса, выделим конечное подпокрытие компакта. Пусть δ — наименьший из радиусов малых кругов. Можно считать, что δ -окрестность множества E' лежит в G' .

Любое множество диаметра меньше δ , пересекающееся с E' , лежит в множестве, где возможно разложение диффеоморфизма.

Покроем E' прямоугольниками $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_m$, $diam(\Delta'_i) < \delta$.

$$\iint_{E'} f \circ \Phi \cdot |J| = \sum_{i=1}^m \iint_{E' \cap \Delta'_i} f \circ \Phi \cdot |J| = \sum_{i=1}^m \iint_{E \cap \varphi(\Delta'_i)} f = \iint_E f.$$

Дополнение. Формула (1) остается справедливой если условия, наложенные на отображение Φ нарушаются на множестве меры нуль, если существуют множества $S' \subset G'$, $S \subset G$ меры нуль, такие что отображение $\Phi : G' \setminus S' \rightarrow G \setminus S$ удовлетворяет условиям Теоремы 1.

Примеры.

$$1) \begin{cases} x = au + bv, \\ y = cu + dv, \end{cases} J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

2) Переход к полярным координатам.

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad J = r.$$

$$\iint_{E: x^2 + y^2 \leq 1} x^2 dx dy = \frac{1}{2} \iint_E (x^2 + y^2) dx dy = \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right] = \frac{1}{2} \iint_{E_1: 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi} r^3 dr d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

.3) Интеграл Эйлера-Пуассона $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \iint_{\substack{0 \leq r \leq +\infty \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = -2\pi \frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} = \pi.$$

4) $I = \iint_{E: 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4} x^4 y^2 dx dy$. Выполним замену переменных по формулам $\begin{cases} u = xy, \\ v = \frac{y}{x}. \end{cases}$ Множество

E преобразуется в прямоугольник $E_1: 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4$,

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 \frac{y}{x} = 2v.$$

Таким образом,

$$I = \iint_{E_1} u^3 \frac{1}{v} \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 u^3 du \int_1^4 \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4} u^4 \Big|_1^2 \frac{1}{v} \Big|_1^4 = \frac{1}{2} \frac{15}{4} \frac{3}{4} = \frac{45}{32}.$$